== 行列式の性質とクラメールの公式 ==

(はじめに)

○数学の歴史において，行列式の考えは連立1次方程式を解く作業の中で生まれた.（ライプニッツ，クラメールなど）

○この頁では，行列式の性質を使ってクラメールの公式を証明する．また，クラメールの公式を使って連立方程式が解けるように練習する.

【未知数が2個の連立1次方程式の場合】

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

の解は($ad-bc\neq 0$ のとき)

$$x=\frac{pd-bq}{ad-bc},\quad y=\frac{aq-pc}{ad-bc}$$

となるが，この式の分母および分子を今日の行列式の記号を使って書くと

$$x=\frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

となる．これがクラメールの公式と呼ばれるものである.

【未知数が3個の連立1次方程式の場合】

$$\begin{cases} ax+by+cz=p \\ dx+ey+fz=q \\ gx+hy+iz=r \end{cases} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

の解をクラメールの公式を使って書くと(分母が0でないとき)

$$x=\frac{\begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

(行列式の性質)

(1) 行列式は，正方行列に対してだけ定義され，行数と列数が異なる行列に対しては定義されない.

(2) 行列式は正方行列に対して定義される関数で，正方行列を A とするとき $det(A)$，$D(A)$ もしくは $|A|$ で表す.

さらに以下においては，行列 A を構成している列ベクトルごとに取り扱うこととし，$A=(\vec{a_1},\ \vec{a_2},\ \dots)$ とするとき，必要に応じて $det(\vec{a_1},\vec{a_2},\dots)$　$D(\vec{a_1},\vec{a_2},\dots)$ という記号も使うものとする.

2次の場合，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，

$\vec{a_1}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ \vec{a_2}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

とおくと，行列式は

$det(A),\ D(A),\ det(\vec{a_1},\vec{a_2}),\ D(\vec{a_1},\vec{a_2})$

などの記号で書ける.

3次の場合は，

$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

のとき，$\vec{a_1}=\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix},\ \vec{a_2}=\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix},\ \vec{a_3}=\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$

とおくと，

行列式は

$det(A),\ D(A),\ det(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}),\ D(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$

などと書ける.

(3) 行列式はn次正方行列に対して1つの数を対応させる関数で次の3つの条件を満たす.

1(多重線形性)･･･どの列に対しても線形である

○この教材では行列式を(*1)(*2)のように定める上記の**1，2，3**などの性質が成り立つことを示し，これを使って行列式を変形する方法を学ぶ.

以下，具体的に示すために3次の行列式の場合を例として示すが，他の場合でも同様に示せる.

1(多重線形性)←(*2) の証明

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}+b_{11})\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -(a_{21}+b_{21})\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +(a_{31}+b_{31})\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{13} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11})\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(b_{11})\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -(a_{21})\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-(b_{21})\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +(a_{31})\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{13} \end{vmatrix}+(b_{31})\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{13} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

だから

$$D(\vec{a_1}+\vec{b_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$$
$$=D(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})+D(\vec{b_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

が成り立つ.

(※)により，行についても多重線形性が言える.

2(交代性)←(*2) の証明

例えば，1列目が2つの列ベクトルの和であるとき

$$D(\vec{a_1}+\vec{b_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$$
$$=D(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})+D(\vec{b_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

また，1列目がある列ベクトルの定数倍であるとき

$$D(k\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})=kD(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

2（交代性）…2つの列を入れ換えると符号が変わる

例えば，1列目と2列目を入れ換えたとき

$$D(\vec{a_2},\vec{a_1},\vec{a_3})=-D(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

また，2列目と3列目を入れ換えたとき

$$D(\vec{a_1},\vec{a_3},\vec{a_2})=-D(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

3（正規性）…単位行列の行列式は1である

$$D(E)=1$$

（※）なお，転置行列の行列式は元の行列の行列式に等しい $D({}^tA)=D(A)$ から，上記の性質1，2は行についても成り立つ．すなわち行についても1’（多重線形性），2’（交代性）が成り立つ．

〇線形代数の教科書には，上記の**1（多重線形性），2（交代性），3（正規性）**の3つの条件を満たすものは，われわれが知っている行列式だけであることが示されている．（証明はかなり長いものになるので，この教材では省略する．）

2次の行列式は，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ …(*1)

3次の行列式は，余因子展開により2次の行列式を使って定義し

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}+g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}\cdots(*2)$$

右上に続く↑

まず，余因子展開を行うときは，各成分に次のようにチェック模様（市松模様）になるように符号を付けることを思い出そう．

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

これにより，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

を1列目に沿って展開するときは

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{13} \end{vmatrix}$$

となるのに対して，

1列目と2列目を入れ換えた場合

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

を2列目に沿って展開すると

$$-a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{13} \end{vmatrix}$$

となる．

このように隣り合う2つの列を入れ換えると符号が変わることは容易に示せる．

次に，2つ以上離れた2つの列を入れ換えるには，上記の隣り合う列の入れ換えを繰り返し行えばよいが，列番号が1つ，2つ，3つ，…と異なるに応じて，隣り合う列の項間は1回，3回，5回，…などと「奇数回」行うことになるから，結局，符号が変わる．

実際には，最小回数でなく無駄の多い入れ換え方法を経由してでも結果を合わせることができるが，その場合でも隣り合う列の入れ換えは奇数回になる

2（交代性）から，行列式の変形に関する次の性質が導かれる．

2.1　2つの列が等しければ行列式の値は0になる．
2.2　1つの列の定数倍を他の列に加えても行列式の値は変わらない．

2.1 ← 2（交代性）　の証明

例えば，1列目と2列目が等しいとき，これらを入れ換えると符号が変わるから

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

したがって

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

2.2 ← 2.1　の証明

例えば，1列目に2列目の定数倍を加える場合

$$D(\vec{a_1}+k\vec{a_2},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

まず，線形性により2つに分けられる

$$=D(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})+D(k\vec{a_2},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

さらに，線形性により第2項の定数を前に出せる

$$=D(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})+kD(\vec{a_2},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

2.1 により，2つの列が等しければ行列式は0になるから

$$=D(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

以上により，他の列の定数倍を加えても行列式の値は変わらない．

【行列式の変形規則：ここまでの要点】

1（多重線形性）…どの列に対しても線形である

【例】 $D(\vec{a_1}+k\vec{b_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$
$=D(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})+kD(\vec{b_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$

2（交代性）･･･2つの列を入れ換えると符号が変わる

【例】 $D(\vec{a_2},\vec{a_1},\vec{a_3})=-D(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$

（2.1） 2つの列が等しければ行列式の値は0になる．

【例】 $D(\vec{a_1},\vec{a_1},\vec{a_3})=0$

（2.2） 1つの列の定数倍を他の列に加えても行列式の値は変わらない．

【例】 $D(\vec{a_1}+k\vec{a_2},\vec{a_2},\vec{a_3})=D(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$

※以上の性質は，行についても成り立つ．

【クラメールの公式】･･･未知数が3個の連立1次方程式の場合

$$\begin{cases} ax+by+cz=p \\ dx+ey+fz=q \quad \cdots(*) \\ gx+hy+iz=r \end{cases}$$

の解は（分母が0でないとき）

$$x=\frac{\begin{vmatrix} p & b & c \\ q & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & p & c \\ d & q & f \\ g & r & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & p \\ d & e & q \\ g & h & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

※ x の分子は，係数行列の1列目を右辺の列に入れ換えたもの．

y の分子は，係数行列の2列目を右辺の列に入れ換えたもの．

z の分子は，係数行列の3列目を右辺の列に入れ換えたもの．

（証明）

$$\vec{a_1}=\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}\quad \vec{a_2}=\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}\quad \vec{a_3}=\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

とおくと，連立方程式(*)は次の形に書ける．

$$x\vec{a_1}+y\vec{a_2}+z\vec{a_3}=\vec{b} \quad \cdots(**)$$

ここで係数行列の行列式

$$D(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

において，1列目を(**)の左辺に書き換えると

$$D(x\vec{a_1}+y\vec{a_2}+z\vec{a_3},\vec{a_2},\vec{a_3}) \quad \cdots(***)$$

この行列式は1を使って次のように変形できる．

$$D(x\vec{a_1}+y\vec{a_2}+z\vec{a_3},\vec{a_2},\vec{a_3})$$
$$=D(x\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})+D(y\vec{a_2},\vec{a_2},\vec{a_3})+D(z\vec{a_3},\vec{a_2},\vec{a_3})$$
$$=xD(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})+yD(\vec{a_2},\vec{a_2},\vec{a_3})+zD(\vec{a_3},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

さらに2.1を使うと，2つの列が等しい行列式の値は0になるから

$$=xD(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

(***)は(**)により次の形に書ける

$$D(\vec{b},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

結局

$$D(\vec{b},\vec{a_2},\vec{a_3})=xD(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$$

$$x=\frac{D(\vec{b},\vec{a_2},\vec{a_3})}{D(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})}$$

2列目，3列目を書き換えると y，z についても同様に示される．

【問題2】

$$\begin{cases} 3x-4y=3 \\ x-2y=-1 \end{cases}$$

$x=5,\ y=3$　　$x=5,\ y=-3$

$x=-5,\ y=3$　　$x=-5,\ y=-3$

【問題3】

$$\begin{cases} 3x+y \qquad =5 \\ x+2y+z=3 \\ -x+2y+z=1 \end{cases}$$

$x=2,\ y=1,\ z=-2$　　$x=-2,\ y=1,\ z=2$

$x=2,\ y=-2,\ z=1$　　$x=1,\ y=2,\ z=-2$

【問題4】

$$\begin{cases} 2x-y+2z=4 \\ 3x+2y-z=-1 \\ x+4y-5z=-7 \end{cases}$$

$x=-1,\ y=0,\ z=2$　　$x=2,\ y=-1,\ z=0$

$x=1,\ y=-2,\ z=0$　　$x=0,\ y=1,\ z=2$

■証明終わり■

【例題1】
次の連立方程式をクラメールの公式を使って解いてください．

$$\begin{cases} x \quad +z=-1 \\ 3x+y-z=2 \\ 2x+y+3z=-2 \end{cases}$$

（解答）
係数行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=5$$

係数行列の1列目，2列目，3列目を各々右辺の係数に入れ換えると

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}=5,\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-5$$

$x=\frac{0}{5}=0,\quad y=\frac{5}{5}=1,\quad z=\frac{-5}{5}=-1$…（答）

【例題2】

$$\begin{cases} x+2y-z=5 \\ x+y+z=1 \\ 2x-2y+z=4 \end{cases}$$

（解答）

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{27}{9}=3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{0}{9}=0 \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-18}{9}=-2$$

次の連立方程式の解をクラメールの公式を使って求めてください．
（暗算では無理です．各自計算用紙で求めてから下の選択肢のうちで正しいものをクリック）

【問題1】

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+5y=7 \end{cases}$$

$x=1, y=-2$　　$x=-1, y=2$

$x=2, y=-1$　　$x=-2, y=1$

右上に続く↑

【問題5】

$$\begin{cases} x-y+2z \quad =3 \\ 3x \quad +z+2w=0 \\ 2x-y \quad -w=2 \\ x-y+3z+w=4 \end{cases}$$

$x=1, y=0, z=-2, w=1$　　$x=0, y=-1, z=2, w=-3$

$x=0, y=1, z=2, w=3$　　$x=0, y=1, z=2, w=-1$