== 行列を対角化するには ==

【要点1】

n次正方行列Aが相異なるn個の実数の固有値λ_1, λ_2, …, λ_nおよびこれに対応する固有ベクトル$\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$, …, $\vec{x_n}$をもつとき，列ベクトル$\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$, …, $\vec{x_n}$を束にした行列をPとおくと，

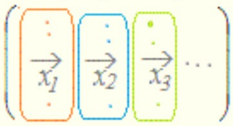
$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & 0\\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \cdots & \\ 0 & & & & \lambda_n\end{pmatrix}\quad\cdots(1)$$

のように対角化できる．

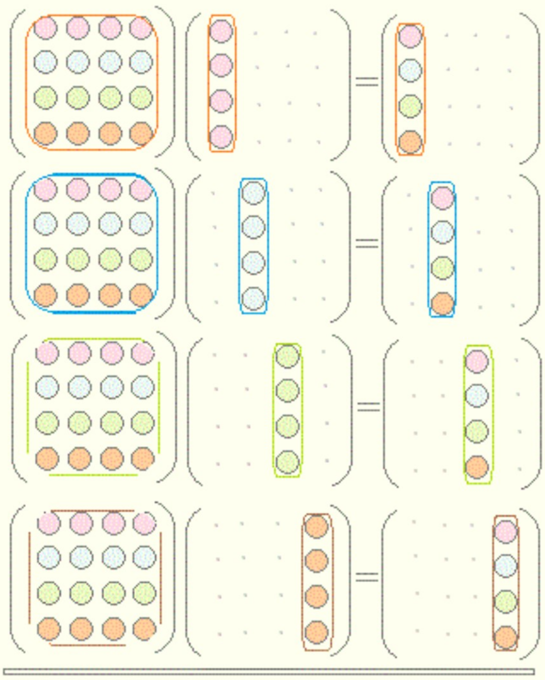
（解説）

列ベクトル$\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$, …, $\vec{x_n}$を束にした行列を

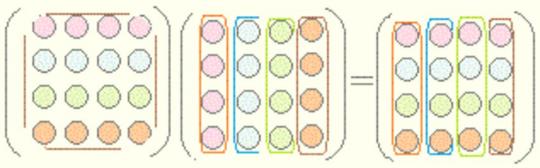
$$P=[\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}]$$



で表すと，右の（参考1）の関係式は



だから



すなわち

$$A[\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}]=[\lambda_1\vec{x_1}, \lambda_2\vec{x_2}, \cdots, \lambda_n\vec{x_n}]$$
$$AP=[\lambda_1\vec{x_1}, \lambda_2\vec{x_2}, \cdots, \lambda_n\vec{x_n}]$$

と書ける．

ここで，（参考2）の(c)を見ると，各列ベクトル$\vec{x_k}$ごとに固有値λ_kを掛けるには，右から対角行列を掛ければよいから，この式は

○ この頁ではn次正方行列Aが相異なるn個の実数の固有値をもつ場合のみを扱う．

○ 統計で登場する相関行列や分散共分散行列などの重要な行列の固有値は実数になる．数学的な理論の上では固有値が等しいという場合もあり得るが，観測データ（実数=小数）を元に実際の作業を行うときに小数の固有値が等しいことはほとんど起こらない．

※ 固有方程式が虚数解をもつ場合や重解をもつ場合の取り扱いは，ややこみいったものになる．これらは，線形代数の教科書・問題集や他のWeb教材に記載されており，この頁では取り扱っていない．

（参考1）

n次正方行列Aが相異なるn個の実数の固有値λ_1, λ_2, …, λ_nおよびこれに対応する固有ベクトル$\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$, …, $\vec{x_n}$をもつとき，

$$A\vec{x_1}=\lambda_1\vec{x_1}$$
$$A\vec{x_2}=\lambda_2\vec{x_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A\vec{x_n}=\lambda_n\vec{x_n}$$

が成り立つ．

（参考2）

(a) （行列）×（列ベクトル）＝（列ベクトル）になる

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}$$

(b) （行ベクトル）×（行列）＝（行ベクトル）になる

$$\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$$

(c) 対角行列を右から掛けると各列が対角成分倍になる

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \lambda_3 a_{13}\\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_3 a_{23}\\ \lambda_1 a_{31} & \lambda_2 a_{32} & \lambda_3 a_{33}\end{pmatrix}$$

(d) 対角行列を左から掛けると各行が対角成分倍になる

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \lambda_1 a_{13}\\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \lambda_2 a_{23}\\ \lambda_3 a_{31} & \lambda_3 a_{32} & \lambda_3 a_{33}\end{pmatrix}$$

（参考3）

(e) 相異なる固有値に対応する固有ベクトルは1次独立である．

(f) n次正方行列Pのn個の列ベクトルが1次独立であるならば，行列Pは正則すなわち逆行列が存在する．

$$AP=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \cdots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdots(2)$$

と表せる．

したがって，もし行列 P に逆行列 P^{-1} が存在すれば(=行列 P が正則行列であれば)，(2)の両辺に左から P^{-1} を掛ければ(1)が得られる．

行列 P に逆行列 P^{-1} が存在することは，右の(参考3)によって分かる．

【要点2】

上の【要点1】によりn次正方行列 A が相異なるn個の実数の固有値をもつとき，A を対角化するには次の手順で行えばよい．

(1) A の固有値をn個求める．
(2) 各々の固有値に対応する固有ベクトルを求める．
(3) 固有ベクトルを順に束ねた行列を P，固有値を順に対角成分とする行列を D とおく．
(ただし，固有値，固有ベクトルは対応する順に並べる)

$$P^{-1}AP=D$$

が求める対角化である．

例1

次の行列を対角化せよ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

(解答)

(1) 固有方程式を解いて固有値を求める．

$$det(A)=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -2 & -4-\lambda \end{pmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow$ $(1-\lambda)(-4-\lambda)+6=0$

$\Leftrightarrow$ $\lambda^2+3\lambda+2=0$

$\Leftrightarrow$ $\lambda=-1, -2$

(2) 固有ベクトルを求める

1) $\lambda=-1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x+3y=0$$

$\Leftrightarrow$ $(x, y)=t(3, -2)$

2) $\lambda=-2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y=0$$

$\Leftrightarrow$ $(x, y)=t(1, -1)$

(3)

$$P=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

例3

次の行列を対角化せよ．
(筆算では無理なのでExcelで求めるものとし，小数第4位まで求めよ．)

$A=$

2.2221	0.5996	0.2272	0.9421

例2

次の行列を対角化せよ．

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 14 & 2 \\ -1 & 9 & -1 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

出典:「線形代数学」掘内龍太郎.浦部治一郎共著(学術出版社)p.171

(解答)

…(この解答は「各場面で求めているもののイメージをつかむため」の例示であり，実際に固有値，固有ベクトルなどを求めるにはExcelで行えばよい．)…

(1) 固有方程式を解いて固有値を求める．

$$det(A)=\begin{pmatrix} -\lambda & 14 & 2 \\ -1 & 9-\lambda & -1 \\ -2 & 4 & 8-\lambda \end{pmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow$ $\lambda^3-17\lambda^2+94\lambda-168=0$

この3次方程式は筆算では「因数定理を使って解く」ことになるが，上に述べたように実際にはExcelで固有値を求めるとよい．

$\Leftrightarrow$ $\lambda=4, 6, 7$

(2) 固有ベクトルを求める

1) $\lambda=4$ のとき

$$\begin{pmatrix} -4 & 14 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2x+7y+z=0) \cdots(*1) \\ -x+5y-z=0 \cdots(*2) \\ -x+2y+2z=0 \cdots(*3) \end{cases}$$

(*2)+(*3)=(*1)だから(*1)は不要
(*2), (*3)より

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=(5y) \cdots(*4) \\ x-2z=(2y) \cdots(*5) \end{cases}$$

(*4)−(*5) $3z=(3y) \rightarrow z=(y)$

(*4)に代入 $x+(y)=(5y) \rightarrow x=(4y)$

$\Leftrightarrow$ $x=(4y), z=(y) \rightarrow x=4t, y=t, z=t$

$\Leftrightarrow$ $(x, y, z)=t(4, 1, 1)$

2) $\lambda=6$ のとき

$$\begin{pmatrix} -6 & 14 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-3x+7y+z=0) \cdots(*1) \\ -x+3y-z=0 \cdots(*2) \\ -x+2y+z=0 \cdots(*3) \end{cases}$$

(*2)+(*3)×2=(*1)だから(*1)は不要

0.9492	2.7782	0.9442	−0.6738
0.2118	0.6148	2.2172	0.9529
0.6131	0.0137	0.6051	2.7825

（解答）

$P=$

0.4767	−0.7019	0.1165	0.4989
−0.6443	−0.0085	−0.7997	0.4952
0.4997	0.7122	0.1083	0.5003
−0.3286	−0.0008	0.5790	0.5056

とおくと，

$P^{-1}=$

0.5493	−0.3651	0.5363	−0.7151
−0.7173	0.0017	0.6972	0.0163
−0.1255	−0.6455	−0.1305	0.8852
0.4997	0.5020	0.4990	0.4994

となり，
次の対角行列 D に対して

$D=$

1.0000	0	0	0
0	2.0000	0	0
0	0	3.0000	0
0	0	0	4.0000

$P^{-1}AP=D$ となる．

(*2), (*3)より

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=(3y) \cdots(*4) \\ x-z=(2y) \cdots(*5) \end{cases}$$

(*4)+(*5)　$2x=(5y)$

(*4)−(*5)　$2z=(y)$

$\Leftrightarrow$　$x=5t,\ y=2t,\ z=t$

$\Leftrightarrow$　$(x,\ y,\ z)=t(5,\ 2,\ 1)$

3)　$\lambda=7$ のとき

$$\begin{pmatrix} -7 & 14 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-7x+14y+2z=0) \cdots(*1) \\ -x+2y-z=0 \cdots(*2) \\ -x+2y+z=0 \cdots(*3) \end{cases}$$

(*2), (*3)より

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=(z) \cdots(*4) \\ x-2y=(-z) \cdots(*5) \end{cases}$$

(*4)−(*5)　$z=0$

(*4)+(*5)　$x=(2y)$

これらを(*1)に代入すると成立するから(*1)は不要

$\Leftrightarrow$　$x=(2y),\ z=0\ \rightarrow\ x=2t,\ y=t,\ z=0$

$\Leftrightarrow$　$(x,\ y,\ z)=t(2,\ 1,\ 0)$

(3)

$$P=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$