この項目では，wxMaxiam（インストール方法）を用いて固有値，固有ベクトルを求めて比較的簡単に行列を対角化する方法を解説する．

類題2.1

次の行列を対角化せよ．

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-3&7&-3\\3&-5&5\end{pmatrix}$$

出典:「線形代数学」掘内龍太郎.浦部治一郎共著（学術出版社）p.171

（解答）

○1　行列Aの成分を入力するには

メニューから「代数」→「手入力による行列の生成」と進み，入力欄において行数：3，列数：3，タイプ：一般，変数名：AとしてOKボタンをクリック

入力欄に与えられた成分を書き込む．（タブキーを使って入力欄を移動するとよい）

```
A: matrix(
[0,1,−2],
[−3,7,−3],
[3,−5,5]
);
```

のように出力され，行列Aに上記の成分が代入されていることが分かる．

○2　Aの固有値と固有ベクトルを求めるには

wxMaximaで，固有値を求めるコマンドは eigenvalus(A)，固有ベクトルを求めるコマンドは eigenvectors(A)であるが，固有ベクトルを求めると各固有値，各々の重複度，固有ベクトルの順に表示されるので，直接に固有ベクトルを求めるとよい．

画面上で空打ちして入力欄を作り，eigenvectors(A)+Shift+Enterとする．または，上記の入力欄のAをポイントしてしながらメニューから「代数」→「固有ベクトル」と進む

[[[1,2,9],[1,1,1]],[[[1,1/3,−1/3]],[[1,0,−1]],[[1,3,−3]]]]

のように出力される．

これは

固有値 $\lambda_1=1$ の重複度は1で，対応する固有ベクトルは

$t\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ 整数値を選べば $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$

固有値 $\lambda_2=2$ の重複度は1で，対応する固有ベクトルは

$t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

固有値 $\lambda_3=9$ の重複度は1で，対応する固有ベクトルは

$t\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$

となることを示している．

○3　固有値と固有ベクトルを使って対角化するには

上記の結果を行列で表すと

$$\begin{pmatrix}0&1&-2\\-3&7&-3\\3&-5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}1$$

$$\begin{pmatrix}0&1&-2\\-3&7&-3\\3&-5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}2$$

$$\begin{pmatrix}0&1&-2\\-3&7&-3\\3&-5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}9$$

これらを束ねて書くと

$$\begin{pmatrix}0&1&-2\\-3&7&-3\\3&-5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&3\\-1&-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&3\\-1&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&9\end{pmatrix}$$

両辺に左から $\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&3\\-1&-1&-3\end{pmatrix}^{-1}$ を掛けると

$$\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&3\\-1&-1&-3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1&-2\\-3&7&-3\\3&-5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&3\\-1&-1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&9\end{pmatrix}$$

類題2.2

次の行列を対角化し，B^n を求めよ．

$$B=\begin{pmatrix}6&6&6\\-2&6&-1\\2&2&3\end{pmatrix}$$

出典:「線形代数学」掘内龍太郎.浦部治一郎共著（学術出版社）p.171

（解答）

○1　行列Bの成分を入力するには

メニューから「代数」→「手入力による行列の生成」と進み，入力欄において行数：3，列数：3，タイプ：一般，変数名：BとしてOKボタンをクリック

入力欄に与えられた成分を書き込む．（タブキーを使って入力欄を移動するとよい）

```
B: matrix(
[6,6,6],
[−2,0,−1],
[2,2,3]
);
```

のように出力され，行列Bに上記の成分が代入されていることが分かる．

○2　Bの固有値と固有ベクトルを求めるには

画面上で空打ちして入力欄を作り，eigenvectors(B)+Shift+Enterとする．または，上記の入力欄のBをポイントしてしながらメニューから「代数」→「固有ベクトル」と進む

[[[1,2,6],[1,1,1]],[[[0,1,−1]],[[1,−4/3,2/3]],[[1,−2/5,2/5]]]]

のように出力される．

これは

固有値 $\lambda_1=1$ の重複度は1で，対応する固有ベクトルは

$t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

固有値 $\lambda_2=2$ の重複度は1で，対応する固有ベクトルは

$t\begin{pmatrix}1\\ -\frac{4}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 整数値を選べば $\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}$

固有値 $\lambda_3=6$ の重複度は1で，対応する固有ベクトルは

$t\begin{pmatrix}1\\ -\frac{2}{5}\\ \frac{2}{5}\end{pmatrix}$ 整数値を選べば $\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}$

となることを示している．

○3　固有値と固有ベクトルを使って対角化するには

上記の結果を行列で表すと

$$\begin{pmatrix}6&6&6\\-2&6&-1\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}1$$

$$\begin{pmatrix}6&6&6\\-2&6&-1\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}2$$

$$\begin{pmatrix}6&6&6\\-2&6&-1\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\2\end{pmatrix}6$$

これらを束ねて書くと

$$\begin{pmatrix}6&6&6\\-2&6&-1\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&5\\1&-4&-2\\-1&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&5\\1&-4&-2\\-1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

両辺に左から $\begin{pmatrix}0&3&5\\1&-4&-2\\-1&2&2\end{pmatrix}^{-1}$ を掛けると

$$\begin{pmatrix}0&3&5\\1&-4&-2\\-1&2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}6&6&6\\-2&6&-1\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&5\\1&-4&-2\\-1&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

※結果のまとめ

$B=\begin{pmatrix}6&6&6\\-2&6&-1\\2&2&3\end{pmatrix}$ に対して，

$P=\begin{pmatrix}0&3&5\\1&-4&-2\\-1&2&2\end{pmatrix}$ とおき，

※結果のまとめ

$A=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-3&7&-3\\3&-5&5\end{pmatrix}$ に対して,

固有ベクトル $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$ を束にした行列を

$P=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&3\\-1&-1&-3\end{pmatrix}$ とおき,

固有値を対角成分に持つ行列を $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&9\end{pmatrix}$

とおくと

$$P^{-1}AP=D \quad \cdots(1)$$

となる. 対角行列のn乗は各成分のn乗になるから, (1)を利用すれば, 行列Aのn乗は簡単に求めることができる. (※)

$$P^{-1}A^nP=D^n \text{ より } A^n=PD^nP^{-1}$$

もしくは, (1)を変形しておいて

$$A=PDP^{-1} \text{ より } A^n=PD^nP^{-1}$$

これより

$$A^n=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&3\\-1&-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&9^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&3\\-1&-1&-3\end{pmatrix}^{-1}$$

さらに

$$\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&3\\-1&-1&-3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8}&\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\\0&-1&-1\\-\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

を用いると, A^n を成分に直すこともできるがかなり複雑になる.

(※)

(1)式のように, ある行列 P とその逆行列 P^{-1} でサンドイッチになっている行列 $P^{-1}AP$ のn乗を計算すると, 先頭と末尾が次々にEとなって消える:

2乗: $(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=PAPP^{-1}AP=PA^2P^{-1}$

3乗: $(P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP)=PA^2PP^{-1}AP=PA^3P^{-1}$

4乗: $(P^{-1}A^3P)(P^{-1}AP)=PA^3PP^{-1}AP=PA^4P^{-1}$

対角行列のn乗は, 各成分をn乗すれば求められる:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0&0\\0&\lambda_2^n&0\\0&0&\lambda_3^n\end{pmatrix}$$

(※)

wxMaximaを用いて(1)式などを検算するには, 1-1で行ったように行列Aを定義し, さらにP, Dもその成分の値を入れて定義すると

行列の積APは **A.P** によって計算できる

(行列の積はアスタリスク(*)ではなくドット(.)を使うことに注意. *を使うと各成分を単純に掛けたものになる)

実際に計算してみると,

$$AP=\begin{pmatrix}3&2&9\\1&0&27\\-1&-2&-27\end{pmatrix} \quad PD=\begin{pmatrix}3&2&9\\1&0&27\\-1&-2&-27\end{pmatrix}$$

のように一致することが確かめられる.

また, wxMaximaにおいては, Pの逆行列を求めるコマンドは P^-1 などではなく, **invert(P)** であることに注意すると(1)式は

```
invert(P).A.P;
```

で計算することになり,これが対角行列と一致する.

固有値を対角成分に持つ行列を $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

とおくと

$$P^{-1}BP=D \quad \cdots(1)$$

となる.

○4 B^n を求める.

$$P^{-1}B^nP=D^n \text{ より } B^n=PD^nP^{-1}$$

$$B^n=\begin{pmatrix}0&3&5\\1&-4&-2\\-1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&5\\1&-4&-2\\-1&2&2\end{pmatrix}^{-1}$$

さらに

$$\begin{pmatrix}0&3&5\\1&-4&-2\\-1&2&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{7}{5}\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{10}&\frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

を用いると, B^n を成分に直すこともできるがかなり複雑になる.

問題

次の行列を対角化せよ.

(筆算では無理なのでExcelで求めるものとし, 小数第3位まで求めよ. Web画面をドラッグ・コピーしてからExcel上に貼り付けると入力の手間が省ける.)

$A=$

-1.624	-1.642	0.322	1.497	1.500
0.560	0.708	1.535	-0.588	0.550
-0.322	3.822	-1.733	2.428	-1.411
4.512	-5.296	2.290	0.617	2.317
1.724	6.145	2.859	0.677	-0.967

(解答)

$P=$

0.308	0.030	-0.705	0.314	-0.096
0.226	0.450	-0.187	0.125	0.265
-0.646	-0.041	0.625	0.256	-0.743
-0.133	-0.275	0.034	0.747	0.604
0.647	0.848	0.274	0.513	0.062

とおくと,

$P^{-1}=$

0.270	-2.614	-1.023	-0.195	1.267
-0.236	2.500	0.605	-0.369	-0.231
-0.921	-1.286	-0.164	0.141	0.754

0.635	−0.266	0.434	0.713	0.371
−0.779	0.963	−0.478	0.555	−0.327

となり,
次の対角行列 D に対して

$D=$

−1.000	0	0	0	0
0	2.000	0	0	0
0	0	−3.000	0	0
0	0	0	4.000	0
0	0	0	0	−5.000

$P^{-1}AP=D$ となる.