== 同次形 微分方程式 ==

■同次形の微分方程式

$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の形に変形できる微分方程式は「同次形」と呼ばれ，$\dfrac{y}{x}=u$ とおくことにより，変数分離形に直して解くことができます．

微分方程式を解くとき，変形の途中経過において分母の x, y, u が0になる場合でも，結果的に一般解の1つの場合として表せることがほとんどなので，以下においてはこのような途中経過で分母が0になるときの場合分けは行わず，それらが0でない場合から得られる一般解のみを扱います．

（解説）

$\dfrac{y}{x}=u$ すなわち $y=xu$（ここで，u は x の関数）とおくと

（右辺）$=f(u)$

また，積の微分法：$(fg)'=f'g+fg'$ により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dx}u+x\frac{du}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

となるから

←この形は，以下において何度も登場するので覚えておく方がよい

（左辺）$=u+x\dfrac{du}{dx}$

したがって，微分方程式は次の形になります．

$$u+x\frac{du}{dx}=f(u)$$

この式は次のように変形できるので，変数分離形になります．

$$x\frac{du}{dx}=f(u)-u$$

$$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

【例題1】
次の微分方程式の一般解を求めてください．

$$x\frac{dy}{dx}=x+y$$

（解答）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}=1+\frac{y}{x}$$

と変形できるから

$\dfrac{y}{x}=u$ とおくと

$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$ により

$$u+x\frac{du}{dx}=1+u$$

$$x\frac{du}{dx}=1$$

$$du=\frac{dx}{x}$$

$$\int du=\int\frac{dx}{x}$$

$$u=\log x+C$$

元の y に戻すと

$$\frac{y}{x}=\log x+C$$

ゆえに

$y=x(\log x+C)$ …（答）

【例題2】
次の微分方程式の一般解を求めてください．

$$x^2+y^2=2xyy'$$

（解答）

$$x^2+y^2=2xy\frac{dy}{dx}$$

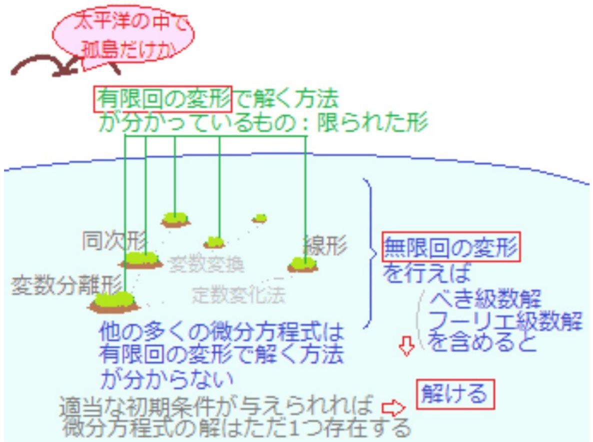
（1階微分方程式の鳥瞰図）

○1階の常微分方程式の中で初等的，入門的なものは，有限回の変形と積分計算によって（初等的に，求積法によって）解が求まるものであり，変数分離形やこれに連なる幾つかの形をしたものがよく知られています．

○これ以外の形の1階の常微分方程式の解き方は，よく分かっていません．
他方で，べき級数が使える場合には，1点の近傍でいくらでも精密な解を求めることができ，その関数の性質を調べることができます．
また，フーリエ級数を使えば大域的に面積の誤差がほとんどないような解を求めることができます．
特筆すべきこととして，適当な初期条件が与えられた微分方程式に対しては，解の存在と一意性（=ただ1つ存在するということ）を証明することができます．（定理があります）

※目的や見方によって，各々の長所は短所と裏腹の関係にあります．
有限回の変形と積分計算で解けるものは，入門的・理論的な練習には適していますが，解ける形が限られています．
級数解は，多くに場合に解が求まるかわりに，仮に求まっても初等的にどのような関数に対応しているか分からないというもどかしさがあります．
近似解は厳密解でないので，いい加減なものに見えますが，エネルギー効率のよいスクリューやエンジンを設計しているような場合には，例えば金属表面を1000分の1mmの精度（10^{-6}m）で削ることは至難の業なので，初めの数項（例えば6項）からなる近似解で十分で，それ以上精密な解があっても利用できず，精密過ぎる解は使い道がありません．

○この頁では，有限回の変形と積分計算でよって（初等的に，求積法によって）解が求まるもののうちで変数変換によって「変数分離形」に直せる「同次形」を扱います．



→続き

$$\int\frac{2u}{u^2-1}du=-\int\frac{dx}{x}$$

$(u^2-1)'=2u$ だから

$\log|u^2-1|=-\log|x|+A$

$\log|u^2-1|+\log|x|=A$

$\log|(u^2-1)x|=A=\log e^A$

$|(u^2-1)x|=e^A=B$ とおく

$(u^2-1)x=\pm B=C$ とおく

元の y に戻すと

$$\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1\right\}x=C$$

$(y^2-x^2)x=Cx^2$

$y^2-x^2=Cx$

$y^2=x^2+Cx$ …（答）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})}$$

と変形できるから

$\frac{y}{x}=u$ とおくと

$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ により

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2u}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2u}-u=\frac{1-u^2}{2u}$$

$$\frac{2u}{u^2-1}du=-\frac{dx}{x}$$

右に続く→

※正しい番号をクリックしてください．
それぞれの問題は暗算では解けませんので，計算用紙が必要です．
※ブラウザによっては，番号枠の少し上の方が反応することがあります．

【問題1】

微分方程式 $xy'=2x+y$ の一般解は次のどれか．

1 $x^2+y^2=Cy$　　2 $y+2xy-x^2=C$

3 $y=Ce^{2x}$　　4 $y=x(2\log|x|+C)$

【問題2】

微分方程式 $y-x+x\frac{dy}{dx}=0$ の一般解は次のどれか．

1 $xy+\log|x|=C$　　2 $y=\frac{C}{x}+\frac{x}{2}$

3 $x^2+2xy=C$　　4 $y^2=Cx^2+x$

【問題3】

微分方程式 $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}$ の一般解は次のどれか．

1 $x^2+2xy+y^2=C$　　2 $x^2-2xy+y^2=C$

3 $x^2+2xy-y^2=C$　　4 $x^2-2xy-y^2=C$

【問題4】

微分方程式 $(x^2-y^2)y'=2xy$ の一般解は次のどれか．

1 $x^2+y^2=Cx$　　2 $x^2+y^2=Cy$

3 $x^2-y^2=Cx$　　4 $x^2-y^2=Cy$

【問題5】

微分方程式 $(2xy-x^2)y'+y^2-2xy=0$ の一般解は次のどれか.

1 $xy(y-x)=C$　　2 $xy^2(x+y)=C$

3 $(x+y)(x-2y)=C$　　4 $y=(x+C)e^x$

【問題6】

微分方程式 $x^2\dfrac{dy}{dx}+xy+2y^2=0$ の一般解は次のどれか.

1 $xy^2=C(x+y)$　　2 $x^2y=C(x+y)$

3 $xy^2=C(2x+y)$　　4 $x^2y=C(x+2y)$