

== 逆行列 ==

【逆行列とは】

n次正方行列 A に対して

$$AB=BA=E_n$$

が成り立つとき、n次正方行列 B を A の逆行列といい、 A^{-1} で表す。ここに、 E_n は n 次の単位行列とする。

【例】

(1) 2次の正方行列について

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \text{は} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{の逆行列}$$

$$\text{また,} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{は} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \text{の逆行列}$$

(2) 3次の正方行列について

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{は} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{の逆行列}$$

$$\text{また,} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{は} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{の逆行列}$$

※n次正方行列 A の逆行列 A^{-1} が存在するとき

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E_n$$

が成り立つ。

※正方行列でないものについては逆行列は考えない。

【逆行列の求め方】

○2次の正方行列について、高校では(教育課程により、また科目選択により、習わないことがある)次のように覚える。

(ア) $|A|=ad-bc \neq 0$ のとき、逆行列が存在し

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{の逆行列は} \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の対角成分は入れ替えて、対角でない成分は符号だけ変えたもの $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ を考える

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

となるから、全体を $ad-bc$ で割ると単位行列になる。

(イ) $|A|=ad-bc=0$ のときは、逆行列は存在しない。

○3次以上の正方行列については、

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{の逆行列を求めるには、その右側に単位行}$$

○この頁に登場する【問題】は、公益社団法人日本技術士会のホームページに掲載されている「技術士第一次試験過去問題 共通科目A 数学」の引用です。(=公表された著作物の引用)

○【解説】は個人の試案ですが、Web教材化にあたって「問題の転記ミス」「考え方の間違い」「プログラムの作動ミス」などが含まれる場合があります。

問題や解説についての質問等は、原作者を煩わせることなく、当Web教材の作成者 (<浅尾>mwm48961@uniteddigital.com) に対して行ってください。

(逆行列の求め方)

【例】

(1)

(高校数学で習う方法で) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めるには、

まず対角成分は入れ替えて、対角でない成分は符号だけ変えて

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{を考える。次に、これを行列式} |A|=4-6=-2 \text{で}$$

$$\text{割って} A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{とする。}$$

行基本変形で求めるには

右側に単位行列を付けた次のような行列を考える

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1行目は左端が1になっている。2行目から1行目の3倍を引く

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2行目の0でない左端を1にするために、2行目を-2で割る

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1行目から2行目の2倍を引いて、左側の行列を単位行列にする

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{よって,} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

行基本変形によって $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めるには、はじめに右側に単位行列を付けた次のような行列を考える

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1行目と2行目を入れ替える

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3行目から1行目の2倍を引く

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1行目から2行目を引く、3行目に2行目を足す

列を付けた次のような行列を考えて

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

行基本変形によって A を単位行列にできたときの右側の行列が逆行列 (A を単位行列にできないとき $|A|=0$ のときは逆行列は存在しない)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

1行目に3行目を足す, 2行目から3行目の2倍を引く

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

よって,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

※正しい番号をクリックしてください。

平成18年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-16

2次の正方行列が $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を満たすとき, 行列 A は次のどれか。

- ① $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

🟡 解説

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

のとき, これらをまとめて

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

と表せるから

両辺に右から $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ を掛けると

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{③}$$

《別解》

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{とおくと}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{より } a = -2, c = 1$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{より } a + b = 1, c + d = 3$$

だから

$$a = -2, b = 3, c = 1, d = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

平成18年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-17

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ について, $AB + 2B = E$ を満たす行列 B は次のどれか。ただし, E は単位行列とする。

- ① $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$
 ④ $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

🟡 解説

$AB + 2B = E$ より

$$(A + 2E)B = E$$

両辺に左から $(A + 2E)^{-1}$ を掛けると

$$B = (A + 2E)^{-1}$$

$A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ だから

$$B = (A + 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{③}$$