== 逆行列 ==

【逆行列とは】

n次正方行列 A に対して

$$AB=BA=E_n$$

が成り立つとき，n次正方行列 B を A の逆行列といい，A^{-1} で表す．ここに，E_n はn次の単位行列とする．

【例】

(1) 2次の正方行列について

$$\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

だから

$\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$ の逆行列

また，$\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$ の逆行列

(2) 3次の正方行列について

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

だから

$\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$ の逆行列

また，$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$ の逆行列

※n次正方行列 A の逆行列 A^{-1} が存在するとき

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E_n$$

が成り立つ．

※正方行列でないものについては逆行列は考えない．

【逆行列の求め方】

〇2次の正方行列について，高校では（教育課程により，また科目選択により，習わないことがある）次のように覚える．

（ア） $|A|=ad-bc\neq 0$ のとき，逆行列が存在し

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の逆行列は $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の対角成分は入れ替えて，対角でない成分は符号だけ変えたもの $\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$ を考えると，

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{pmatrix}$$

となるから，全体を $ad-bc$ で割ると単位行列になる．

（イ） $|A|=ad-bc=0$ のときは，逆行列は存在しない．

〇3次以上の正方行列については，

$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ の逆行列を求めるには，その右側に単位行

（逆行列の求め方）

【例】

(1)

（高校数学で習う方法で）$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ の逆行列を求めるには，

まず対角成分は入れ替えて，対角でない成分は符号だけ変えて

$\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$ を考える．次に，これを行列式 $|A|=4-6=-2$ で割って $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ とする．

行基本変形で求めるには

右側に単位行列を付けた次のような行列を考える

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)$$

1行目は左端が1になっている．2行目から1行目の3倍を引く

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right)$$

2行目の 0 でない左端を 1 にするために，2行目を -2 で割る

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

1行目から2行目の2倍を引いて，左側の行列を単位行列にする

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

よって，$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(2)

行基本変形によって $\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$ の逆行列を求めるには，はじめに右側に単位行列を付けた次のような行列を考える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

1行目と2行目を入れ替える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

3行目から1行目の2倍を引く

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&-1&-1&0&-2&1\end{array}\right)$$

1行目から2行目を引く，3行目に2行目を足す

列を付けた次のような行列を考えて

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

行基本変形によって A を単位行列にできたときの右側の行列が逆行列（ A を単位行列にできないとき（ $|A|=0$ のとき）は逆行列は存在しない）

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

1行目に3行目を足す，2行目から3行目の2倍を引く

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

よって，$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

※正しい 番号 をクリックしてください．

平成18年度技術士第一次試験問題［共通問題］
【数学】Ⅲ−16

2次の正方行列が $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を満たすとき，行列 A は次のどれか．

1 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　2 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$　3 $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$　5 $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

平成18年度技術士第一次試験問題［共通問題］
【数学】Ⅲ−17

行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ について，$AB+2B=E$ を満たす行列 B は次のどれか．ただし，E は単位行列とする．

1 $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　2 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$　3 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

4 $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$　5 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$