

平成20年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-18

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} の $(1, 1)$ 成分は、次のど

れか。

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

● 解説

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ から行基本変形を行って、逆行列を求め

る

1行目を2で割る

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

3行目から1行目の4倍を引く

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2行目から3行目の3倍を引く

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2行目を2で割る

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

逆行列 A^{-1} の $(1, 1)$ 成分は $\frac{1}{2} \rightarrow$ ①

平成21年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-19

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} の成分 $(1, 1)$ が -1 であ

るとき、実数 a の値は次のどれか。

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

● 解説

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ から行基本変形を行う

2行目から1行目を引く

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2行2列の成分 $1-a$ が 0 の場合は、2行目のすべての成分が 0 となるため、行列式が 0 となり、逆行列が存在しない。これは題意に合わないから $a \neq 0$ といえる。そこで2行目を $1-a$ で割る。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & \frac{1}{1-a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-a} & -\frac{1}{1-a} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

1行目から2行目の a 倍を引く。3行目から2行目を引く

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 - \frac{a}{1-a} & \frac{a}{1-a} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-a} & -\frac{1}{1-a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} & 1 \end{array} \right)$$

できた逆行列の $(1, 1)$ 成分が -1 であるから

$$1 - \frac{a}{1-a} = -1$$

$$a - 1 - a = -(1-a)$$

$$a = 2 \rightarrow$$
 ⑤

平成21年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-16

2次の正方行列 A が $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満た

すとき、 $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は次のどれか。

- ① $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

● 解説

《逆行列を利用する方法》

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

だから

平成22年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-18

行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix}$ の逆行列の $(3, 3)$ 成分が 3 のとき、 a の値

は次のどれか。

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

● 解説

《必要なところだけ計算する》

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるから、積の3列目だけ比較すると

$$x - y + 3 = 0 \cdots (1)$$

$$2x + y = 0 \cdots (2)$$

$$A \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{4}$$

《行列の積の線形性を利用する方法》

行列 A 、列ベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{y}_2$ について
 $A\vec{x}_1 = \vec{y}_1, A\vec{x}_2 = \vec{y}_2$
 ならば
 $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$
 が成り立つ

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

だから

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3x - y + 3a = 1 \cdots (3)$$

(1)(2)より $x = -1, y = 2$

これを(3)に代入

$$a = 2 \rightarrow \boxed{5}$$

《別解：行基本変形により逆行列を求める》

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{から変形し始める}$$

2行目から1行目の2倍を引く。3行目から1行目の3倍を引く

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a-3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2行目を3で割る

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & a-3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

1行目に2行目を足す。3行目から2行目の2倍を引く

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & a-\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array} \right)$$

3行目に $\frac{a}{3a-5}$ を掛ける

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3(3a-5)} & -\frac{2}{3(3a-5)} & \frac{3}{3a-5} \end{array} \right)$$

まだ途中であるが、以下の変形は逆行列の (3,3) 成分に影響しない。逆行列の (3,3) 成分が3だから

$$\frac{3}{3a-5} = 3$$

$$3a-5=1$$

$$a=2$$

平成23年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-18

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は、次のどれか。

1 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ 4 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

解説

平成24年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ-19

行列 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列は、次のどれか。

1 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 2 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

解説

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{から行基本変形で求める}$$

1行目の符号を変える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{から行基本変形によって求める}$$

2行目から1行目を引く

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

(分数を避けるために)2行目と3行目を入れ替える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

2行目の符号を変える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

1行目から2行目の2倍を引く. 3行目に2行目の2倍を足す

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

2行目に3行目を足す

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

よって, 逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{③}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

1行目に2行目の2倍を足す

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

3行目の符号を変える

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

1行目から3行目の5倍を引く. 2行目から3行目の2倍を引く

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

よって, 逆行列は $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{①}$