== 逆行列の求め方 ==

○ 単位行列の定義

任意のn次正方行列Aに対して右から掛けても左から掛けてもAとなるような行列を単位行列という.

Eが単位行列 ⇔ 任意のn次正方行列Aに対して $AE=A$, $EA=A$

※ 単位行列は次数ごとに決まる. 紛らわしくなければ, 単にEで表してもよいが, 次数の異なる様々な単位行列を扱っているときは, その次数に応じてE_nで表す.

2次の単位行列は$E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

3次の単位行列は$E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\k&l&m\\x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\k&l&m\\x&y&z\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a&b&c\\k&l&m\\x&y&z\end{pmatrix}$$

n次の単位行列は$E_n=\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&\cdots&\\0&&&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&\cdots&\\0&&&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&\cdots&\\0&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

※ 任意の数xに対して右から掛けても左から掛けてもその値を変えない数を単位元という.

eが単位元 ⇔ 任意の数xに対して $\begin{cases}xe=x\\ex=x\end{cases}$

数の単位元eは1である. すなわち, 次の等式が成り立つ.

任意の数xに対して $\begin{cases}x\cdot1=x\\1\cdot x=x\end{cases}$

※ 単位元は, すべての数に対して共通なものが1つだけある. ($e=1$)

※ 各々の数x $(x\neq0)$ に対して右から掛けても左から掛けても単位元となる数yをxの逆元という.

yがxの逆元⇔ 各々の数xに対して $\begin{cases}xy=1\\yx=1\end{cases}$

0でない数xの逆元yは$\dfrac{1}{x}$である. すなわち, 次の等式が成り立つ.

各々の数xに対して $\begin{cases}x\cdot\dfrac{1}{x}=1\\\dfrac{1}{x}\cdot x=1\end{cases}$

※ 逆元は各々の数に対応して1つずつ決まり, 異なる数の逆元は異なる数になる.

例 2の逆元は$\dfrac{1}{2}$, 3の逆元は$\dfrac{1}{3}$

○ 逆行列の定義

与えられたn次正方行列Aに対して右から掛けても左から掛けても単位行列Eとなるような行列をAの逆行列といい, A^{-1}で表す.

A^{-1}がAの逆元 ⇔ 各々の行列Aに対して $AA^{-1}=E$, $A^{-1}A=E$

※ 行列の割り算は定義されていないので$\dfrac{1}{A}$とは書かない. こ

逆行列の例

$A=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}$のとき

$$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

こでは，$^{-1}$ という記号を「逆の」という意味の記号だと考えるとよい．

※　逆行列は，正方行列に対してのみ定義でき，正方行列でない行列に対しては逆行列は考えない．

また，0でない数に対してのみ逆数があるのと同様の事情があり，下記に述べるように行列式が0とならない行列に対してのみ逆行列が存在する．

逆行列が存在する行列は正則であるという．（このような行列を正則行列という．）
A は正則行列　⇔　$det(A)\neq 0$

○　逆行列の求め方

(1)　Excelで求める方法

下の表１においてA1:D4に4×4行列が入力されているとき，その逆行列をF1:I4に書き込む場合を例にとって解説する．

Excelのワークシート関数で逆行列を求めるものはMINVERSE(元の行列の範囲) なので，これを利用する．

1)　セルF1に =MINVERSE(A11:D14) と書きこむ．
（関数を覚えずにメニューからたどっていくときは，画面上の方にある数式バーの左側の fx をクリック→関数の分類：数学/三角またはすべて，関数名：MINVERSE　OK
→配列：A1:D4　OK）

2)　1)の段階ではF1のセルに逆行列の1つの成分が書き込まれるだけで逆行列全体（配列=行列）が書き込まれるわけではない．そこで，次に逆行列全体を得るために，F1:I4の範囲を配列にする．そのためには，
F1:I4の範囲を選択，反転表示にしておいて，画面上の数式バーをポイントし，Ctrl+ShiftしながらEnterを押す．

*)　下記の表1の例のように，元の行列 A の各成分が整数値であってもその逆行列の各成分は小数（または分数）となることが多い．Excelでセルの書式設定が「標準」や「数値」になっているとどのような分数を表しているのか分からないことがある．

(i)　分母が3桁までの分数になるときは，下記のように分数で表示することができる．このとき，負の分数は帯分数として表示され，整数部分にのみ符号が付けられる．例 −3 1/3 = −10/3 のこと

Excel2002：書式→セル，分数，3桁増加
Excel2007：ホーム→セル 書式，分数，3桁増加

(ii)　元の行列の各成分が整数であるのに，分母が4桁以上の分数になるようなときは，後に述べるように逆行列の計算において $det(A)$ で割ることが原因なので，得られた逆行列の各係数を $det(A)$ 倍してみると，それがどのような分数を表していたかが分かる．（結果は戻して考える必要あり．注→）

表1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	4	4	1	0		-3 1/3	3 5/6	3 1/6	1 1/3
2	2	3	1	-2		1 2/3	-1 2/3	-1 1/3	- 2/3
3	0	1	-1	2		7 2/3	-8 2/3	-7 1/3	-2 2/3
4	5	-1	2	1		3	-3 1/2	-2 1/2	-1

だから $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから $B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

注

左の表1の例では，$det(A)=6$ となり，

$det(A) * A^{-1}=$

−20	23	19	8
10	−10	−8	−4
46	−52	−44	−16
18	−21	−15	−6

となるので，$det(A)=6$ で割れば左の結果と一致する．

例　次の行列の逆行列を求めよ．（各成分は小数第3位まで求めよ．）

(1)

1.2	2.3	2.4	3.2
0.7	0.23	0.1	0.3
3.1	3.2	3.5	−4.1
1.3	1.2	0.1	0

(2)

0.365	0.361	0.783	0.019	0.624
0.817	0.93	0.59	0.68	0.037
0.699	0.429	0.643	0.71	0.794
0.4	0.092	0.158	0.88	0.44
0.365	0.406	0.719	0.527	0.396

（解答）

(1)

−0.127	1.887	0.039	−0.224
0.123	−2.097	−0.057	1.152
0.169	0.629	0.178	−0.920
0.145	0.328	−0.107	−0.055

(2)

73.145	18.168	−77.481	71.430	−40.970
−80.878	−18.608	87.480	−80.026	42.699
40.212	9.218	−44.179	39.054	−19.037
−9.735	−2.288	9.069	−7.852	6.095
−44.554	−11.359	49.873	−44.252	22.964