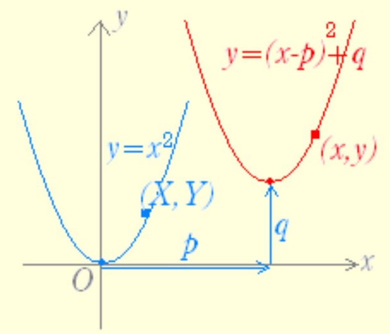
== （例題対比）平方完成の変形 ==

［標準形］
$y=(x-p)^2+q$ のグラフは $y=x^2$ のグラフを x 軸の正の向きに p , y 軸の正の向きに q だけ平行移動したもので，その頂点の座標は $(p\ ,\ q)$ である． 右図→



○ 上で述べたように，2次関数が標準形 : $y=(x-p)^2+q$ の形で書かれていれば頂点の座標が分かるが，展開形 : $y=x^2+bx+c$ の形で書かれているときはそのままでは頂点の座標は分からない．

○ そこで，2次関数が展開形で書かれているときにその頂点の座標を求めるためには，標準形に直さなければならない．この変形は「平方完成」と呼ばれる．

$$(x-p)^2+q \underset{平方完成}{\overset{展開}{\rightleftarrows}} x^2+bx+c$$

※ 展開の逆といっても「平方完成」は因数分解とは異なり，必ず2乗の形で足し算または引き算の定数項が付く．

（平方完成の考え方）

$(x+p)^2=x^2+2px+p^2$ だから $x^2+2px+p^2=(x+p)^2$ $x^2+2px=(x+p)^2-p^2$ $2p=A$ とおくと $x^2+Ax=(x+\frac{A}{2})^2-(\frac{A}{2})^2$	$(x-p)^2=x^2-2px+p^2$ だから $x^2-2px+p^2=(x-p)^2$ $x^2-2px=(x-p)^2-p^2$ $2p=A$ とおくと $x^2-Ax=(x-\frac{A}{2})^2-(\frac{A}{2})^2$

※ 次の点が重要である．

$$x^2+Ax=(x+\underbrace{\frac{A}{2}}_{半分})^2-\underbrace{(\frac{A}{2})^2}_{半分の2乗}$$

※ A の符号が負のときも

$$x^2-Ax=(x-\underbrace{\frac{A}{2}}_{半分})^2-\underbrace{(\frac{A}{2})^2}_{半分の2乗}$$

となり，最後が「引き算」になることに注意．

［例題1］ 次の式を $(x-p)^2+q$ の形に直せ． 右参考→

(1) x^2+4x
（答案）
$\frac{4}{2}=2$ だから
$x^2+4x=(x+2)^2-2^2=(x+2)^2-4$ …（答）

(2) x^2-6x
（答案）
$\frac{6}{2}=3$ だから
$x^2-6x=(x-3)^2-3^2=(x-3)^2-9$ …（答）

(3) x^2+8x+3
（答案）
$\frac{8}{2}=4$ だから
$x^2+8x+3=(x+4)^2-4^2+3=(x+4)^2-13$ …（答）
（定数項は最後に合計すればよい．）

x^2+3x のような式を平方完成すると，
$3\div2=\frac{3}{2}$
だから分数が登場する．
例
$x^2+3x=(x+\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$

［例題2］

［問題1］ 次の式を $(x-p)^2+q$ の形に直せ．

(1)
$x^2+2x=(x+\square)^2-\square$

採点する　やり直す

(2)
$x^2-10x=(x-\square)^2-\square$

採点する　やり直す

(3)
$x^2+6x-5=(x+\square)^2-\square$

採点する　やり直す

参考
2乗の計算が得意でない場合，次のように「足してから引く」と考える方が分かりやすいことがある．各自の分かりやすい方でやればよい．

(1) $x^2+4x=x^2+4x+4-4=(x+2)^2-4$ …（答）

(2) $x^2-6x=x^2-6x+9-9=(x-3)^2-9$ …（答）

(3) $x^2+8x+3=x^2+8x+16-16+3=(x+4)^2-13$ …（答）

［問題2］ 次の式を $(x-p)^2+q$ の形に直せ．

(1)
$x^2+x=(x+\frac{\square}{\square})^2-\frac{\square}{\square}$

採点する　やり直す

x^2-5x を $(x-p)^2+q$ の形に直せ.

(答案)

$x^2-5x=(x-\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$ …(答)

○ 上で解説した平方完成の変形は，x^2 の係数が 1 になっているときに使えるので，一般の2次式 ax^2+bx+c を平方完成するためには，初めにx^2 の係数 a でくくって括弧の中で x^2 の係数を 1 にして平方完成の変形を行う.

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c$$

※ $x^2+\frac{b}{a}x$ の部分に対して，上で学んだ平方完成の変形を行う.

※ 定数項 c をいっしょに括弧でくくってしまうと最後に括弧をはずして計算する必要があり，二度手間となり計算間違いしやすいので，定数項 c はそのまま置いておくのが有利･･･入れてから出すのなら初めから入れない方がよい.

例

$2x^2+4x=2(x^2+2x)=2\{(x+1)^2-1\}$

ここで外側の括弧 { ... } をはずすには，係数 2 を掛けなければならないことに注意

$2\{(x+1)^2-1\}=2(x+1)^2-2$

例 この計算では分数になっても構わずに進める.

$2x^2-3x=2(x^2-\frac{3}{2}x)=2\{(x-\frac{3}{4})^2-(\frac{3}{4})^2\}$

$=2\{(x-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}\}=2(x-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{8}$

[例題3]

(1) $3x^2-x+1$ を $a(x-p)^2+q$ の形に直せ.

(答案)

$3x^2-x+1=3(x^2-\frac{1}{3}x)+1=3\{(x-\frac{1}{6})^2-\frac{1}{36}\}+1$

$=3(x-\frac{1}{6})^2-\frac{1}{12}+1=3(x-\frac{1}{6})^2+\frac{11}{12}$ …(答)

(2) $-2x^2+3x-5$ を $a(x-p)^2+q$ の形に直せ.

(答案)

$-2x^2+3x-5=-2(x^2-\frac{3}{2}x)-5=-2\{(x-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}\}-5$

$=-2(x-\frac{3}{4})^2+\frac{9}{8}-5=-2(x-\frac{3}{4})^2-\frac{31}{8}$ …(答)

x^2 の係数でくくるということは各係数を割ることなので，次の例のように分数の係数でくくれば各々の係数を分数で割る

(2)

$x^2+5x+2=(x+\frac{\square}{\square})^2-\frac{\square}{\square}$

採点する　やり直す

(3)

$x^2-3x+7=(x-\frac{\square}{\square})^2+\frac{\square}{\square}$

採点する　やり直す

[問題3] 次の式を $a(x-p)^2+q$ の形に直せ.

(1)

$2x^2+8x=\square(x+\square)^2-\square$

採点する　やり直す

(2)

$3x^2-12x+10=\square(x-\square)^2-\square$

採点する　やり直す

(3)

$-2x^2+4x-7=\square(x-\square)^2-\square$

採点する　やり直す

(4)

$3x^2-3x+7=\square(x-\frac{\square}{\square})^2+\frac{\square}{\square}$

採点する　やり直す

[問題4] 次の式を $a(x-p)^2+q$ の形に直せ.

(1)

$\frac{1}{2}x^2+5x=\frac{\square}{\square}(x+\square)^2-\frac{\square}{\square}$

こと，すなわちその逆数を掛けることになる．

$\frac{1}{2}x^2+3x=\frac{1}{2}(x^2+6x)$

※　展開したときに元に戻るかどうか確かめるとよい．

［例題4］

（1） $\frac{1}{3}x^2-x$ を $a(x-p)^2+q$ の形に直せ．

（答案）

$\frac{1}{3}x^2-x=\frac{1}{3}(x^2-3x)=\frac{1}{3}\{(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}\}$

$=\frac{1}{3}(x-\frac{3}{2})^2-\frac{3}{4}$ …（答）

採点する　やり直す

（2）

$-\frac{1}{3}x^2-x+2=-\frac{\square}{\square}(x+\frac{\square}{\square})^2+\frac{\square}{\square}$

採点する　やり直す