

== (例題対比) 放物線の頂点の座標

[標準形]

○ $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを x 軸の正の向きに p 、 y 軸の正の向きに q だけ平行移動したもので、その頂点の座標は (p, q) である。 [図1→]

○ 2次関数のグラフ(放物線)は左右対称になっており、この対称軸を放物線の軸という。
 y 軸に平行(x 軸に垂直)な直線の方程式は、 $x=p$ の形で表わされるので、放物線の軸の方程式は右図のように $x=1$ 、 $x=2$ 、 $x=3$ などと書かれる。 [図2→]

放物線の軸の方程式 $x=p$ における p の値は頂点の x 座標に等しい。そこで、頂点の座標が分かれば軸の方程式も分かる。

[例題1] 次の2次関数の軸の方程式と頂点の座標を求めよ。

(1) $y=2(x-3)^2+4$

(答案)

軸 $x=3$ 、頂点 $(3, 4)$ …(答)

(2) $y=3(x+4)^2+5$

(答案)

軸 $x=-4$ 、頂点 $(-4, 5)$ …(答)

(x 座標の符号に注意。 $y=3(x-(-4))^2+5$) と読む。

(3) $y=-4(x-5)^2-6$

(答案)

軸 $x=5$ 、頂点 $(5, -6)$ …(答)

(x^2 の係数 -4 はグラフの「形」(上に凸)だけに関係しており頂点の座標には関係ない。)

(4) $y=\frac{3}{2}(x-3)^2$

(答案)

軸 $x=3$ 、頂点 $(3, 0)$ …(答)

(頂点が x 軸上にあるとき、このような式になる。 $y=\frac{3}{2}(x-3)^2+0$ と読む。)

(5) $y=-\frac{2}{3}x^2+4$

(答案)

軸 $x=0$ 、頂点 $(0, 4)$ …(答)

(頂点が y 軸上にあるとき、このような式になる。

$y=-\frac{2}{3}(x-0)^2+4$ と読む。)

[問題1] 次の2次関数の軸の方程式と頂点の座標を求めよ。

(1) $y=3(x-5)^2+2$

軸の方程式 $x=$ 、頂点の座標 (,)

[採点する](#) [やり直す](#) [解答](#)

軸の方程式 $x=5$

頂点の座標 $(5, 2)$

[閉じる](#)

(2) $y=-3(x-2)^2+6$

軸の方程式 $x=$ 、頂点の座標 (,)

[採点する](#) [やり直す](#) [解答](#)

軸の方程式 $x=2$

頂点の座標 $(2, 6)$

[閉じる](#)

(3) $y=4(x+3)^2+1$

軸の方程式 $x=$ 、頂点の座標 (,)

図1

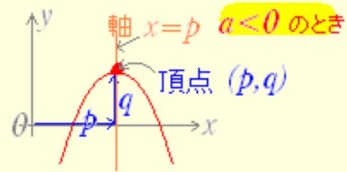
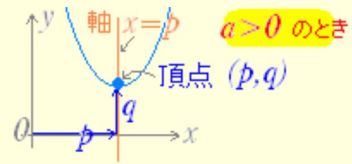
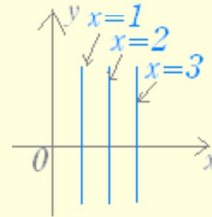


図2



※ 軸は「直線の方程式」として表わし、単に 1 や 2 とは書かずに、 $x=1$ 、 $x=2$ などと書く。

(4) $y=-\frac{1}{2}(x-\frac{3}{2})^2-\frac{5}{4}$

軸の方程式 $x=$, 頂点の座標 (,)

[採点する](#) [やり直す](#) [解答](#)

軸の方程式 $x=\frac{3}{2}$
 頂点の座標 $(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$

[閉じる](#)

(5) $y=-5(x+3)^2$

軸の方程式 $x=$, 頂点の座標 (,)

[採点する](#) [やり直す](#) [解答](#)

軸の方程式 $x=-3$

頂点の座標 $(-3, 0)$

[閉じる](#)

(6) $y=-x^2-3$

軸の方程式 $x=$, 頂点の座標 (,)

採点する やり直す 解答

軸の方程式 $x=-3$

頂点の座標 $(-3, 1)$

閉じる

[展開形]

2次関数が展開形で書かれているときは、これを平方完成して標準形に直せば軸の方程式、頂点の座標が分かる。

$$\begin{aligned}
 ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\
 &= a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c \\
 &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\frac{b^2}{4a^2}+c \\
 &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}
 \end{aligned}$$

※ 実際に問題を解くときには、この公式を丸暗記するのではなく、具体的な係数に応じて平方完成の変形をするとよい。(上の結果を公式として丸暗記するのは大変だから)

[例題2] 次の2次関数の軸の方程式と頂点の座標を求めよ。

(1) $y=2x^2+4x+7$

(答案)

$$\begin{aligned}
 y &= 2x^2+4x+7=2(x^2+2x)+7 \\
 &= 2\{(x+1)^2-1\}+7 \\
 &= 2(x+1)^2-2+7 \\
 &= 2(x+1)^2+5 \\
 \text{軸 } x &= -1, \text{ 頂点 } (-1, 5) \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

[問題2] 次の2次関数の軸の方程式と頂点の座標を求めよ。

(1) $y=3x^2-6x+4$

軸の方程式 $x=1$, 頂点の座標 $(1, 1)$ ○○○

採点する やり直す 解説

$$\begin{aligned}
 y &= 3x^2-6x+4=3(x^2-2x)+4 \\
 &= 3\{(x-1)^2-1\}+4=3(x-1)^2-3+4 \\
 &= 3(x-1)^2+1
 \end{aligned}$$

軸の方程式 $x=1$

頂点の座標 $(1, 1)$

閉じる

採点する やり直す 解答

軸の方程式 $x=0$

頂点の座標 $(0, -3)$

閉じる

(2) $y=-2x^2+8x$

軸の方程式 $x=2$, 頂点の座標 $(2, 8)$ ○○○

採点する やり直す 解説

$$\begin{aligned}
 y &= -2x^2+8x=-2(x^2-4x) \\
 &= -2\{(x-2)^2-4\}=-2(x-2)^2+8
 \end{aligned}$$

軸の方程式 $x=2$

頂点の座標 $(2, 8)$

閉じる

(3) $y=-x^2-x+3$

軸の方程式 $x=-\frac{1}{2}$, 頂点の座標 $(-\frac{1}{2}, \frac{13}{4})$ ○○○○○○○

採点する やり直す 解説

$$\begin{aligned}
 y &= -x^2-x+3=-\{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\}+3 \\
 &= -\{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\}+3=-\{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\}+3 \\
 &= -\{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\}+3=-\{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\}+\frac{13}{4}
 \end{aligned}$$

軸の方程式 $x=-\frac{1}{2}$
頂点の座標 $(-\frac{1}{2}, \frac{13}{4})$

閉じる

(4) $y=-\frac{1}{2}x^2+4x$

軸の方程式 $x=4$, 頂点の座標 $(4, 8)$ ○○○

採点する やり直す 解説

$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{1}{2}(x^2-8x)=-\frac{1}{2}\{(x-4)^2-16\} \\
 &= -\frac{1}{2}(x-4)^2+8
 \end{aligned}$$

軸の方程式 $x=4$

頂点の座標 $(4, 8)$

閉じる