== 連立方程式 ==

※正しい番号をクリックしてください．

○この頁に登場する【問題】は，公益社団法人日本技術士会のホームページに掲載されている「技術士第一次試験過去問題 共通科目A 数学」の引用です．(=公表された著作物の引用)

○【解説】は個人の試案ですが，Web教材化にあたって「問題の転記ミス」「考え方の間違い」「プログラムの作動ミス」などが含まれる場合があり得ます．
　問題や解説についての質問等は，原著作者を煩わせることなく，当Web教材の作成者(<浅尾>mwm48961@uniteddigital.com)に対して行ってください．

平成16年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ−19

連立方程式 $\begin{cases} \lambda x+y+z=0 \\ x-\lambda+z=0 \\ x+y-\lambda z=0 \end{cases}$ が $x=y=z=0$ 以外の解をもつとき，実数 λ の値は次のどれか．

1 -1　2 $-\frac{1}{2}$　3 0　4 $\frac{1}{2}$　5 1

○ HELP

同次(斉次)連立一次方程式
$A\vec{x}=\vec{0}$ …(1)
が自明でない解
$\vec{x}\neq\vec{0}$
をもつための必要条件は
$det(A)=0$

もし，$det(A)\neq 0$ ならば，逆行列 A^{-1} が存在することとなり，(1)に左から A^{-1} を掛けると，
$A^{-1}A\vec{x}=A^{-1}\vec{0}$
したがって
$\vec{x}=\vec{0}$
となる．すなわち自明解のみをもつ．
この対偶をとれば上記の結果を得る

$det\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}=0$ を解くと

$\lambda\, det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}=0$

$\lambda(\lambda^2-1)-(-\lambda-1)+(1+\lambda)=0$

$\lambda^3+\lambda+2=0$

$(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+2)=0$

$\lambda^2-\lambda+2=0$ の解は虚数であるから

実数解は $\lambda=-1$

正確には，$\lambda=-1$ のときに，実際に自明でない解をもつことを示さなければならないが，選択問題の解はただ一つであり，これ以外には解はないから，確かめるまでもない

→ 1

平成17年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ−19

連立方程式 $\begin{cases} x-2y=k \\ x+2y=9 \\ 2x-3y=3+k \end{cases}$ が解をもつとき，定数 k の値は次のどれか．

1 1　2 2　3 3　4 4　5 5

○ HELP

$\begin{cases} x-2y=k\cdots(1) \\ x+2y=9\cdots(2) \\ 2x-3y=3+k\cdots(3) \end{cases}$

の(1)(2)がただ一つの解をもつから(図形的には1点で交わるから)，(1)(2)(3)が解をもつためには，(1)(2)の解が(3)を満たせばよい(図形的には(3)が(1)(2)の交点を通ればよい)

(1)(2)を解くと
x=$\frac{k+9}{2}$，y=$\frac{9-k}{4}$

これが(3)を満たせばよいから
$(k+9)-3(\frac{9-k}{4})=3+k$

より
$4x+36-27k+3k=12+4k$
$3k=3$
$k=1$ → 1

平成18年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ−14

連立方程式 $\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ x\quad+\quad z=2 \\ x+y+2z=k \end{cases}$ が解をもつとき，定数 k の値は次のどれか．

1 -2　2 -1　3 0　4 1　5 2

○ HELP

$\begin{cases} 2x+y+3z=1\cdots(1) \\ x\quad+\quad z=2\cdots(2) \\ x+y+2z=k\cdots(3) \end{cases}$

(2)+(3)より
$2x+y+3z=2+k$ …(4)
(4)は(1)と平行(な平面)だから，解が存在するためには，これらが一致しなければならない
$2+k=1$

平成19年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ−14

連立方程式 $\begin{cases} x+y+az=1 \\ x+ay+z=3 \\ ax+y+z=2a \end{cases}$ の解が無数に存在するとき，a の値は次のどれか．

1 -2　2 -1　3 0　4 1　5 2

○ HELP

方程式 $ax=b$ の解は
(ア)　$a\neq 0$ のときは，ただ1つ $x=\frac{b}{a}$ に定まる．
(イ)　$a=0,\ b=0$ のときは，不定(無数に多くの解)
(ウ)　$a=0,\ b\neq 0$ のときは，不能(解は存在しない)
※(ア)において，$b=0$ と $b\neq 0$ に分ける必要はない．$b=0$ のときは，上記の結果に単純に $b=0$ を代入

$k=-1$ → 2

≪別解≫

(2)(3)を x, y の方程式として解くと(z で表すと)

$$\begin{cases} x=(2-z) \\ x+y=(k-2z) \end{cases}$$

$x=(2-z),\ y=(k-2z)-(2-z)=k-z-2$

この解が(1)を満たせばよいから

$2(2-z)+(k-z-2)+3z=1$

$k=-1$

すれば, $x=0$ が得られる

$$\begin{cases} x+y+az=1 \cdots (1) \\ x+ay+z=3 \cdots (2) \\ ax+y+z=2a \cdots (3) \end{cases}$$

x を消去すると

(2)−(1)

$(a-1)y+(1-a)z=2$ …(4)

(3)−(1)× a

$(1-a)y+(1-a^2)z=a$ …(5)

(4)+(5)により y を消去すると

$(-a^2-a+2)z=a+2$

$(a^2+a-2)z=-(a+2)$

$(a+2)(a-1)z=-(a+2)$ …(6)

(6)より

(ア)　$a\neq-2,\ 1$ のときは, 解はただ1つに定まる(z がただ1つに定まると, x,y もただ1つに定まる)⇒題意に適さない

(イ)　$a=-2$ のときは, 無数に多くの解がある(z が不定になると, x,y も不定になる)⇒題意に適する

(ウ)　$a=1$ のときは, 解はない(z が存在しなければ, 方程式の解はない)⇒題意に適さない

→ 1

平成21年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ−17

連立方程式 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ \quad y+z=a \\ x \quad +2z=-1 \end{cases}$ が解をもつとき, 定数 a の値は次のどれか.

1 -2　2 -1　3 0　4 1　5 2

HELP

$$\begin{cases} x-y+z=1 \cdots (1) \\ \quad y+z=a \cdots (2) \\ x \quad +2z=-1 \cdots (3) \end{cases}$$

(3)−(1)

$y+z=-2$ …(4)

(2)と(4)は(3次元空間の)平行な平面になるから

(ア)　$a\neq-2$ のときは解はない.

(イ)　$a=-2$ のときは一致し, 解は無数にある.

(その平面上の点 (x,y,z) はすべて解となる)

以上により, 解をもつのは(イ)の場合 → 1

平成22年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ−16

連立1次方程式 $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ ax+y \qquad =1 \\ x+ay+z=-1 \end{cases}$ の解が無数に存在するとき, 定数 a の値は次のどれか.

1 $-\frac{1}{2}$　2 $-\frac{1}{4}$　3 0　4 $\frac{1}{4}$　5 $\frac{1}{2}$

HELP

方程式 $ax=b$ の解は

(ア)　$a\neq0$ のときは, ただ1つ $x=\frac{b}{a}$ に定まる.

(イ)　$a=0,\ b=0$ のときは, 不定(無数に多くの解)

(ウ)　$a=0,\ b\neq0$ のときは, 不能(解は存在しない)

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \cdots (1) \\ ax+y \qquad =1 \cdots (2) \\ x+ay+z=-1 \cdots (3) \end{cases}$$

(1)−(3)×2により z を消去する

$-x+(1-2a)y=2$ …(4)

(2)+(4)× a により x を消去する

$\{1+a(1-2a)\}y=1+2a$

$(-2a^2+a+1)y=(2a+1)$

$(2a^2-a-1)y=-(2a+1)$

$(2a+1)(a-1)y=-(2a+1)$

$a=-\frac{1}{2}$ のとき, y は不定→ (x,y,z) は無数に存在する

→ 1

平成23年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ−16

連立1次方程式 $\begin{cases} x+y+z=-1 \\ x+2y+4z=-6 \end{cases}$ と同値な直線の方程式は, 次のどれか.

平成24年度技術士第一次試験問題[共通問題]
【数学】Ⅲ−16

x, y, z に関する連立1次方程式 $\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 3x+4y+7z=1 \\ x-2y+9z=a \end{cases}$ が解をもつとき, a の値は次のどれか.

1 $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=z+2$ 2 $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{-1}$

3 $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{-1}$ 4 $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=z+2$

5 $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=z+2$

HELP

$$\begin{cases} x+y+z=-1\cdots(1) \\ x+2y+4z=-6\cdots(2) \end{cases}$$

(2)−(1)

$y=(-3z-5)$ …(3)

(3)を(1)に代入

$x=(-z-1)-(-3z-5)=(2z+4)$ …(4)

(3)(4)より，$z=t$ とおいて t による媒介変数で表すと

$x=(2t+4),\ y=(-3t-5),\ z=(t)$

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+5}{-3}=z$$

各辺に 2 を足すと

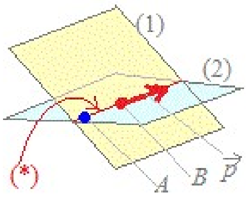
$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=z+2$ …(*) → 1

≪参考≫

2平面(1)(2)の共有部分が直線(*)の方程式になります．

点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を通り，方向ベクトル $\vec{p}=(a, b, c)$ に平行な直線の方程式は

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$



で表されますが，この点 $A(x_0, y_0, z_0)$ の選び方は自由で，直線上にある他の点 $B(x_1, y_1, z_1)$ でもよい．この点の選び方が上記の答案で「各辺に 2 を足す」という操作に対応しています．

1 -2 2 -1 3 0 4 1 5 2

HELP

$$\begin{cases} x+3y-z=1\cdots(1) \\ 3x+4y+7z=1\cdots(2) \\ x-2y+9z=a\cdots(3) \end{cases}$$

(2)−(1)×2

$x-2y+9z=-1$ …(4)

(4)は(3)と平行な平面だから，$a=-1$ のとき（一致するとき）に限り，解がある． → 2