== 行列の対角化とは ==

○ 行列の対角化とは

対角行列はべき乗（累乗）計算が簡単にできるなど便利な性質があり，対角行列になおすことができればメリットが大きい．

与えられた正方行列 A に対して，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}$$

となるような行列 P を見つけて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにすることを対角化という．

（参考）

(1) 対角行列の積を求めるには対角成分を掛けるだけでよい．

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \mu_2 & \\ 0 & & \mu_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1 & & 0\\ & \lambda_2\mu_2 & \\ 0 & & \lambda_3\mu_3\end{pmatrix}$$

(2) 対角行列のn乗を求めるには各対角成分をn乗すればよい．

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & 0\\ & \lambda_2^n & \\ 0 & & \lambda_3^n\end{pmatrix}$$

※ 「対角化せよ」という問題に対しては，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}$$

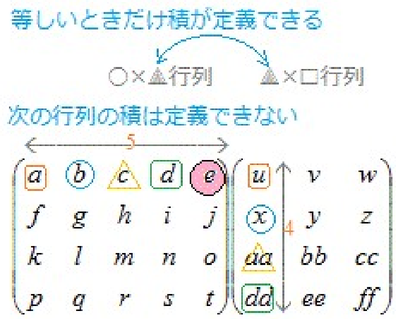
の形で答えるとよい．

この式に左から P を，右から P^{-1} を掛けた式，

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}P^{-1}$$

は同じ内容を表している．

※注1 m×n行列とj×k行列の積はn＝jの場合のみ定義される．



したがって，行列のべき乗（累乗）が定義されるのは正方行列に限る．

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}^2$$ ：あり ，$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}^2$$ ：なし

※注2 対角行列でない行列 A を対角行列にすることはできない．対角化とは，$P^{-1}AP$ を対角行列にすることをいう．

○ $P^{-1}AP$ の形の式の特徴

・ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}$ のとき

左辺のn乗については，

$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$ が成り立つ．

右辺のn乗については

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & 0\\ & \lambda_2^n & \\ 0 & & \lambda_3^n\end{pmatrix}$$ が成り立つ．

したがって，

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & 0\\ & \lambda_2^n & \\ 0 & & \lambda_3^n\end{pmatrix}$$

両辺に左から P を，右から P^{-1} を掛けると

$$A^n=P\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & 0\\ & \lambda_2^n & \\ 0 & & \lambda_3^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

が求まる．

※ 対角行列 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}$ を D で表すとき，次のように変形してもよい．

$P^{-1}AP=D \Rightarrow A=PDP^{-1}$

のとき

※ 行列の積について

(1) 交換法則は成立しない．

一般には $AB\neq BA$

このため，行列の積について文字の順序を入れ替えることはできない．

(2) 結合法則は成立する．

つねに $(AB)C=A(BC)$

このため，どの掛け算を先に行うかは自由に変えられる．また，ABC と書くとき，どちらの意味に解釈されても結果は等しくなるので，$(AB)C$ や $A(BC)$ を単に ABC と書くことができる．

ある行列 P とその逆行列 P^{-1} との積は単位行列になる

$$P^{-1}P=PP^{-1}=E$$

が，交換法則が成り立たないから

$$P^{-1}AP=?=P^{-1}PA=A$$

などと変形することはできない．（間に A があるから勝手に順序を入れ替えて $P^{-1}P$ を作ることはできない．）

結合法則を利用すると $P^{-1}AP$ の形の式のn乗は，次のように簡単になる．

○ 2乗のとき

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=P^{-1}A(PP^{-1})AP=P^{-1}AEAP=P^{-1}AAP$$

だから

$$(P^{-1}AP)^2=P^{-1}A^2P$$

が成り立つ．

○ 3乗以上のときも

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)$$

$$A^n=(PDP^{-1})^n=PD^nP^{-1}=P\begin{pmatrix}\lambda_1{}^n & & 0\\ & \lambda_2{}^n & \\ 0 & & \lambda_3{}^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

$=P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP$

において隣り合う PP^{-1} を先に計算して E にしておくと，掛け算ではすべて無視できて

$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$

となることが分かる．

○ 対角化と累乗計算の例

与えられた正方行列 A に対して，

$P^{-1}AP=D$ （D は対角行列）

となるような行列 P を見つける方法については，次の頁で扱う．
ここでは，行列 P が見つかったときの累乗計算を示す．

例1

$$A=\begin{pmatrix}8 & 1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

のとき，

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

とおくと，

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$$

となるから

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & 9^n\end{pmatrix}$$

よって

$$A^n=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & 9^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4^n+4\cdot 9^n & -4^n+9^n\\ -4^{n+1}+4\cdot 9^n & 4^{n+1}+9^n\end{pmatrix}$$

例2

$$A=\begin{pmatrix}6 & 4 & 2\\ 5 & 7 & 4\\ -5 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

のとき，

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & -7\\ -1 & 1 & -5\\ 0 & -3 & 10\end{pmatrix}$$

とおくと，

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & -2\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

となるから

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 5^n & 0\\ 0 & 0 & 6^n\end{pmatrix}$$

よって

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 2 & -7\\ -1 & 1 & -5\\ 0 & -3 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 5^n & 0\\ 0 & 0 & 6^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & -2\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$