

== ベルヌーイ形 微分方程式 ==

■ ベルヌーイ形の微分方程式

次の形の微分方程式はベルヌーイの微分方程式とよばれ、 $y^{1-n}=u$  とおくことにより線形微分方程式に直して解くことができます。

$n=0$  の場合は線形微分方程式になり、 $n=1$  の場合は変数分離形になりますので、ここではこれらの場合は考えないことにします。

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \dots (1)$$

(解説)

(1)の両辺を $y^n$ で割ると

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

ここで、 $u=y^{1-n}$  とおくと

$$\frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

となるから

$$\frac{1}{1-n} \frac{du}{dx} + P(x)u = Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$

ここで、 $(1-n)P(x)=S(x)$ 、 $(1-n)Q(x)=T(x)$  と見ると

$$\frac{du}{dx} + S(x)u = T(x)$$

は線形微分方程式となります。

【例1】

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x y^2 \text{ の一般解を求めてください。}$$

上の公式において  $P(x)=1$ 、 $Q(x)=e^x$ 、 $n=2$  となる場合になっています。

(解答)

両辺を $y^2$ で割ると

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + y^{-1} = e^x \dots (1)$$

$u=y^{-1}$  …(2)とおくと

$$\frac{du}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$$

となるから

$$-\frac{du}{dx} + u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} - u = -e^x \dots (3)$$

(3)式は  $u$  について線形微分方程式となるのでこれを解く。

はじめに同次方程式

$$\frac{du}{dx} - u = 0 \dots (3')$$

を解く

$$\frac{du}{dx} = u$$

$$\frac{du}{u} = dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int dx$$

$$\log |u| = x + C_1$$

$$|u| = e^{x+C_1} = e^{C_1} e^x$$

$$u = \pm e^{C_1} e^x = C_2 e^x$$

そこで非同次方程式(3)に対して定数変化法により

$u=z(x)e^x$  …(4)の形の解を求める。

$$u' = z'e^x + ze^x \text{ だから}$$

(3)は次の形になる。

$$z'e^x + ze^x - ze^x = -e^x$$

$$z'e^x = -e^x$$

$$z' = -1$$

合成関数の微分法

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx}$$

○ 1階の常微分方程式のうちで、初等的に(有限回の変形と積分計算によって)解く方法が解明されているものは限られていますが、この頁に登場するベルヌーイ(Bernoulli)の微分方程式は、変数変換によって線形微分方程式に直して解くことができます。

○ ただし、「理論上は解ける」ということと、実際に多項式や指数関数、対数関数、三角関数などの合成として示すことができるかどうかというの間には大きな溝があります。左の欄の  $P(x)$ 、 $Q(x)$  の組合せによって、例えば次のような積分計算が登場する場合には、その結果を多項式や指数関数、対数関数、三角関数などの合成として示すことはできません。

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{dx}{\log x}, \int \frac{\log x}{x+1} dx \text{ など多数}$$

○ このような関数が必要になるときは、その不定積分(または積分区間の上端または下端を  $x$  とする定積分)によって新たに関数を定義して使うことになります。

次のような関数があります。

$$\int \frac{dx}{\log x} = \text{Li } x \dots (\text{積分対数関数})$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \text{Ei } x \dots (\text{積分指数関数})$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx = \text{erf}(x) \dots (\text{誤差関数})$$

これらの関数において、それぞれの  $x$  に対する具体的な値を求めたいときは、数値積分が利用できます。(必要な精度で求めるとよい) ■■

【例2】

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = y^3 \sin x \text{ の一般解を求めてください。}$$

上の公式において  $P(x) = -\frac{1}{2x}$ 、 $Q(x) = \sin x$ 、 $n=3$  となる場合になっています。

(解答)

両辺を $y^3$ で割ると

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x} y^{-2} = \sin x$$

$u=y^{-2}$  …(1)とおくと

$$\frac{du}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

となるから

$$-\frac{1}{2} \frac{du}{dx} - \frac{1}{2x} u = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x} u = -2 \sin x \dots (2)$$

(2)式は  $u$  について線形微分方程式となるのでこれを解く。

はじめに同次方程式

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0 \dots (2')$$

を解く

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\log |u| = -\log |x| + C_1$$

$$\log |u| + \log |x| = C_1$$

$$\log |ux| = C_1$$

$$|ux| = e^{C_1}$$

$$ux = \pm e^{C_1} = C_2$$

$$u = \frac{C_2}{x}$$

そこで非同次方程式(2)に対して定数変化法により

合成関数の微分法

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx}$$

により

$$\frac{du}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

$$z = - \int dx = -x + C$$

(4)に戻すと

$$u = e^x(C-x)$$

さらに(2)に戻すと

$$y = \frac{1}{e^x(C-x)} \dots (\text{答})$$

$u = \frac{z(x)}{x} \dots (3)$ の形の解を求める。

$$u' = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} \text{ だから}$$

(2)は次の形になる。

$$\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} + \frac{z}{x^2} = -2 \sin x$$

$$\frac{z'}{x} = -2 \sin x$$

$$z = -2 \int x \sin x \, dx$$

$$= -2(-x \cos x + \sin x + C_3)$$

$$= 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

(3)に戻すと

$$u = \frac{2x \cos x - 2 \sin x + C}{x}$$

さらに(1)に戻すと

$$\frac{1}{y^2} = \frac{2x \cos x - 2 \sin x + C}{x}$$

$$y^2(2x \cos x - 2 \sin x + C) = x \dots (\text{答})$$

$$I = \int x \sin x \, dx$$

は、部分積分法により求めることができます。

$f=x$	$f'=1$
$g'=\sin x$	$g=-\cos x$

$$I = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C_3$$

### 【問題1】

微分方程式  $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x y^3$  の一般解を求めてください。

1  $y = 2e^{-x} + Ce^{-2x}$

2  $y = \frac{2}{3}e^{-x} + Ce^{-3x}$

3  $\frac{1}{y^2} = 2e^x + Ce^{2x}$

4  $\frac{1}{y^2} = \frac{2}{3}e^x + Ce^{4x}$

変数の変換? 同次方程式? 非同次方程式? 解答

元の方程式の両辺を  $y^3$  で割ると

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + 2y^{-2} = e^x$$

そこで、 $u = y^{-2} \dots (1)$  とおくと

$$\frac{du}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

となるから、 $u$ に関する方程式は

$$-\frac{1}{2} \frac{du}{dx} + 2u = e^x$$

$$\frac{du}{dx} - 4u = -2e^x \dots (2)$$

となり、線形微分方程式になります。

はじめに、同次方程式  $\frac{du}{dx} - 4u = 0$  を解く。

$$\frac{du}{u} = 4dx$$

$$\int \frac{du}{u} = 4 \int dx$$

$$\log |u| = 4x + C_1$$

$$|u| = e^{4x+C_1} = e^{C_1} e^{4x}$$

$$u = \pm e^{C_1} e^{4x} = C_2 e^{4x}$$

次に、定数変化法を使って  $u = z(x)e^{4x} \dots (3)$  の形で(2)の解を求める。

積の微分法により

$$\frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx} e^{4x} + 4z e^{4x} \text{ だから(2)は次の形になる。}$$

$$\frac{dz}{dx} e^{4x} + 4z e^{4x} - 4z e^{4x} = -2e^x$$

$$\frac{dz}{dx} e^{4x} = -2e^x$$

$$\frac{dz}{dx} = -2e^{-3x}$$

$$z = -2 \int e^{-3x} dx = \frac{2}{3} e^{-3x} + C$$

(3)に戻すと

$$u = \left(\frac{2}{3} e^{-3x} + C\right) e^{4x}$$

### 【問題2】

微分方程式  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{2}{3}y^4$  の一般解を求めてください。

1  $y^3 = x + Cx^3$

2  $y^3 = x^3 + Cx$

3  $\frac{1}{y^3} = x + Cx^3$

4  $\frac{1}{y^3} = x^3 + Cx$

変数の変換? 同次方程式? 非同次方程式? 解答

元の方程式の両辺を  $y^4$  で割ると

$$y^{-4} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^{-3} = \frac{2}{3}$$

そこで、 $u = y^{-3} \dots (1)$  とおくと

$$\frac{du}{dx} = -3y^{-4} \frac{dy}{dx}$$

となるから、 $u$ に関する方程式は

$$-\frac{1}{3} \frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{3u}{x} = -2 \dots (2)$$

となり、線形微分方程式になります。

はじめに、同次方程式  $\frac{du}{dx} - \frac{3u}{x} = 0$  を解く。

$$\frac{du}{u} = \frac{3}{x} dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{3}{x} dx$$

$$\log |u| = 3 \log |x| + C_1 = \log |x^3| + C_1$$

$$= \log |x^3| + \log e^{C_1} = \log |e^{C_1} x^3|$$

$$|u| = |e^{C_1} x^3|$$

$$u = \pm e^{C_1} x^3 = C_2 x^3$$

次に、定数変化法を使って  $u = z(x)x^3 \dots (3)$  の形で(2)の解を求める。

積の微分法により

$$\frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx} x^3 + 3zx^2 \text{ だから(2)は次の形になる。}$$

$$\frac{dz}{dx} x^3 + 3zx^2 - \frac{3}{x} zx^3 = -2$$

$$\frac{dz}{dx} x^3 = -2$$

$$\frac{dz}{dx} = -2x^{-3}$$

$$z = x^{-2} + C$$

(3)に戻すと

$$= \frac{2}{3}e^x + Ce^{4x}$$

(1)に戻すと

$$\frac{1}{y^2} = \frac{2}{3}e^x + Ce^{4x} \rightarrow \boxed{4}$$

**【問題3】**

微分方程式  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \log x (x > 0)$  の一般解を求めてください。

①  $\frac{1}{y} = \left\{ -\frac{(\log x)^2}{2} + C \right\} x$     ②  $\frac{1}{y} = \left\{ \log(\log x) + C \right\} x$

③  $\frac{1}{y^2} = \left\{ -\frac{(\log x)^2}{2} + C \right\} x$     ④  $\frac{1}{y^2} = \left\{ \log(\log x) + C \right\} x$

○ 変数の変換? 同次方程式? 非同次方程式? 解答

元の方程式の両辺を  $y^2$  で割ると

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^{-1} = \log x$$

そこで,  $u = y^{-1} \dots (1)$  とおくと

$$\frac{du}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$$

となるから,  $u$  に関する方程式は

$$-\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = \log x$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = -\log x \dots (2)$$

となり, 線形微分方程式になります。

はじめに, 同次方程式  $\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0$  を解く。

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\log |u| = \log |x| + C_1 = \log |x| + \log e^{C_1} = \log |e^{C_1} x|$$

$$|u| = |e^{C_1} x|$$

$$u = \pm e^{C_1} x = C_2 x$$

次に, 定数変化法を使って  $u = z(x)x \dots (3)$  の形で(2)の解を求める。

積の微分法により

$$\frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx} x + z \text{ だから (2) は次の形になる。}$$

$$\frac{dz}{dx} x + z - z = -\log x$$

$$\frac{dz}{dx} x = -\log x$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\log x}{x}$$

$$z = -\int \frac{\log x}{x} dx$$

$$= -\left( \frac{(\log x)^2}{2} + C_3 \right)$$

$$= -\left( \frac{(\log x)^2}{2} + C \right)$$

(3)に戻すと

$$u = \left( -\frac{(\log x)^2}{2} + C \right) x$$

(1)に戻すと

$$\frac{1}{y} = \left( -\frac{(\log x)^2}{2} + C \right) x \rightarrow \boxed{1}$$

$$u = (x^{-2} + C)x^3 = x + Cx^3$$

(1)に戻すと

$$\frac{1}{y^3} = x + Cx^3 \rightarrow \boxed{3}$$

**【問題4】**

微分方程式  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2} = y^3 \cos x$  の一般解を求めてください。

①  $\frac{1}{y} = \sin x - \cos x + Ce^{-x}$     ②  $\frac{1}{y} = \cos x - \sin x + Ce^{-x}$

③  $\frac{1}{y^2} = \sin x - \cos x + Ce^x$     ④  $\frac{1}{y^2} = \cos x - \sin x + Ce^x$

○ 変数の変換? 同次方程式? 非同次方程式? 解答

元の方程式の両辺を  $y^3$  で割ると

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} y^{-2} = \cos x$$

そこで,  $u = y^{-2} \dots (1)$  とおくと

$$\frac{du}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$$

となるから,  $u$  に関する方程式は

$$-\frac{1}{2} \frac{du}{dx} + \frac{u}{2} = \cos x$$

$$\frac{du}{dx} - u = -2 \cos x \dots (2)$$

となり, 線形微分方程式になります。

はじめに, 同次方程式  $\frac{du}{dx} - u = 0$  を解く。

$$\frac{du}{u} = dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int dx$$

$$\log |u| = x + C_1 = \log e^{x+C_1} = \log (e^{C_1} e^x)$$

$$|u| = e^{C_1} e^x$$

$$u = \pm e^{C_1} e^x = C_2 e^x$$

次に, 定数変化法を使って  $u = z(x)e^x \dots (3)$  の形で(2)の解を求める。

積の微分法により

$$\frac{du}{dx} = \frac{dz}{dx} e^x + z e^x \text{ だから (2) は次の形になる。}$$

$$\frac{dz}{dx} e^x + z e^x - z e^x$$

$$= -2 \cos x$$

$$\frac{dz}{dx} e^x = -2 \cos x$$

$$\frac{dz}{dx} = -2 e^{-x} \cos x$$

$$z = -2 \int e^{-x} \cos x dx$$

$$= -e^{-x} (\sin x - \cos x)$$

$$x) - 2C_3$$

$$= e^{-x} (\cos x - \sin x) + C$$

(3)に戻すと

$$u = \cos x - \sin x + Ce^x$$

(1)に戻すと

$$\frac{1}{y^2} = \cos x - \sin x + Ce^x \rightarrow \boxed{4}$$

$$I = \int e^{-x} \cos x dx \text{ は,}$$

部分積分を2回行って求めることができます。

$f = e^{-x}$	$f' = -e^{-x}$
$g' = \cos x$	$g = \sin x$

$$I = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx$$

$p = e^{-x}$	$p' = -e^{-x}$
$q' = \sin x$	$q = -\cos x$

$$I = e^{-x} \sin x + (-e^{-x} \cos x$$

$$- \int e^{-x} \cos x dx)$$

$$I = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - I$$

$$2I = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x$$

$$I = \frac{e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x) + C_3$$