== 1階線形 微分方程式 ==

次の形の常微分方程式を1階線形常微分方程式といいます．

$y'+P(x)y=Q(x)$ …(1)

方程式(1)の右辺：$Q(x)$ を 0 とおいてできる同次方程式
（この同次方程式は，変数分離形になり比較的容易に解けます）

$y'+P(x)y=0$ …(2)

の1つの解を $u(x)$ とすると，方程式(1)の一般解は

$$y=u(x)\left(\int\frac{Q(x)}{u(x)}dx+C\right) \cdots(3)$$

で求められます．

参考書には

上記の $u(x)$ の代わりに，$e^{-\int P(x)dx}$ のまま書いて

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right) \cdots(3')$$

と書かれているのが普通です．この方が覚えやすい人は，これで覚えるとよい．ただし，赤と青で示した部分は，定数項まで同じ1つの関数の符号だけ逆のものを使います．

筆者は，この複雑な式を見ると頭がクラクラ（目がチカチカ）して，どこで息を継いだらよいか困ってしまうので，上記の(3)のように同次方程式の解を $u(x)$ として，2段階で表すようにしています．

（解説）

同次方程式(2)は，次のように変形できるので，変数分離形です．

$$y'+P(x)y=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-P(x)y$$
$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$

両辺を積分すると

$$\int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx$$
$$\log|y|=-\int P(x)dx$$
$$|y|=e^{-\int P(x)dx+A}=e^{A}e^{-\int P(x)dx}=Be^{-\int P(x)dx} \text{ とおく}$$
$$y=\pm Be^{-\int P(x)dx}=Ce^{-\int P(x)dx} \cdots(4)$$

右に続く→

理論の上では上記のように解けますが，実際の積分計算が難しいかどうかは

$u(x)=e^{-\int P(x)dx}$ や $\int\frac{Q(x)}{u(x)}dx$ がどんな計算になるかによります．

すなわち，$P(x)$ や $\frac{Q(x)}{u(x)}$ の形によっては，筆算では手に負えない問題になることがあります．

→続き

(4)式は，C を任意定数とするときに(2)を満たすが，そのままでは(1)を満たさない．

このような場合に，
同次方程式 $y'+P(x)y=0$
の**一般解の定数 C を関数に置き換えて**，
非同次方程式 $y'+P(x)y=Q(x)$
の解を求める方法を**定数変化法**という．

なぜ,そんな方法を思いつくのか？自分にはなぜ思いつかないのか？などと考えても前向きの考え方にはなりません．思いついた人が偉いと考えるとよい．

定数変化法は，数学史上に残るラグランジェの功績ですが，後からついていく我々は，ラグランジェが発見した方法のおいしいところをいただいて，節約できた時間を今の自分に必要なことに当てたらよいと割り切るとよい．

ただし，この定数変化法は2階以上の微分方程式において，同次方程式の解から非同次方程式の解を求める場合にも利用できるなど適用範囲の広いものなので，「今度出てきたら，真似してみよう」と覚えておく値打ちがあります．

(4)式において，定数 C を関数 $z(x)$ に置き換えて

$u(x)=e^{-\int P(x)dx}$ は(2)の1つの解

$y=z(x)u(x)$ …(5)

とおいて，関数 $z(x)$ を求めることにする．

積の微分法により：$y'=(zu)'=z'u+zu'$ だから，(1)式は次の形に書ける．

$$z'u+zu'+P(x)y=Q(x) \cdots(1')$$

ここで $u(x)$ は(2)の1つの解だから

$$u'+P(x)u=0$$
$$zu'+P(x)zu=0$$
$$zu'+P(x)y=0$$

そこで，(1')において赤で示した項が消えるから，関数 $z(x)$ は，またしても次の変数分離形の微分方程式で求められる．

$$z'u=Q(x)$$
$$\frac{dz}{dx}u=Q(x)$$
$$dz=\frac{Q(x)}{u}dx$$

したがって

$$z=\int\frac{Q(x)}{u}dx+C$$

(5)に代入すれば，目的の解が得られる．

$$y=u(x)\left(\int\frac{Q(x)}{u}dx+C\right)$$

【例題1】

微分方程式 $y'-y=2x$ の一般解を求めてください．

この方程式は，(1)において，$P(x)=-1,\ Q(x)=2x$ という場合になっています．

（解答）

♪==定数変化法の練習も兼ねて，じっくりやる場合==♪

はじめに，同次方程式 $y'-y=0$ の解を求める．

$$\frac{dy}{dx}=y$$

【指数法則】…よく使う

【例題2】

微分方程式 $y'+2y=3e^{4x}$ の一般解を求めてください．

この方程式は，(1)において，$P(x)=2,\ Q(x)=3e^{4x}$ という場合になっています．

（解答）

♪==定数変化法の練習も兼ねて，じっくりやる場合==♪

はじめに，同次方程式 $y'+2y=0$ の解を求める．

$$\frac{dy}{dx}=-2y$$

$\dfrac{dy}{y}=dx$

$e^{x+C_1}=e^xe^{C_1}$

$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int dx$

$\log|y|=x+C_1$

$|y|=e^{x+C_1}=e^{C_1}e^x=C_2e^x$ ($e^{C_1}=C_2$ とおく)

$y=\pm C_2e^x=C_3e^x$ ($\pm C_2=C_3$ とおく)

次に，定数変化法を用いて，$C_3=z(x)$ とおいて $y=ze^x$ (z は x の関数)の形で元の非同次方程式の解を求める．

$y=ze^x$ のとき

$y'=z'e^x+ze^x$ となるから

元の方程式は次の形に書ける．

$z'e^x+ze^x-ze^x=2x$

$z'e^x=2x$

$\dfrac{dz}{dx}e^x=2x$

$dz=\dfrac{2x}{e^x}dx=2xe^{-x}dx$

$\displaystyle\int dz=2\int xe^{-x}dx$

$\displaystyle z=2\int xe^{-x}dx$

右のように x を微分する側に選んで，部分積分によって求める．

$f=x$	$f'=1$
$g'=e^{-x}$	$g=-e^{-x}$

$\displaystyle\int fg'\,dx=fg-\int f'g\,dx$ により

$\displaystyle\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C_4$

$z=2(-xe^{-x}-e^{-x}+C_4)$

y に戻すと

$y=2(-xe^{-x}-e^{-x}+C_4)e^x$

$y=-2x-2+2C_4e^x=-2x-2+Ce^x$ …(答)

♪==(3)または(3')は公式と割り切って直接代入する場合==♪

$P(x)=-1$ だから，$u(x)=e^{-\int P(x)dx}=e^x$

$Q(x)=2x$ だから，$\displaystyle\int\frac{Q(x)}{u(x)}dx=\int\frac{2x}{e^x}dx=2\int xe^{-x}dx$

$=2(-xe^{-x}-e^{-x})+C$

したがって

$y=e^x\{2(-xe^{-x}-e^{-x})+C\}=-2x-2+Ce^x$ …(答)

$\dfrac{dy}{y}=-2dx$

$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=-\int 2dx$

$\log|y|=-2x+C_1$

$|y|=e^{-2x+C_1}=e^{C_1}e^{-2x}=C_2e^{-2x}$ ($e^{C_1}=C_2$ とおく)

$y=\pm C_2e^{-2x}=C_3e^{-2x}$ ($\pm C_2=C_3$ とおく)

次に，定数変化法を用いて，$C_3=z(x)$ とおいて $y=ze^{-2x}$ (z は x の関数)の形で元の非同次方程式の解を求める．

$y=ze^{-2x}$ のとき

$y'=z'e^{-2x}-2ze^{-2x}$ となるから

元の方程式は次の形に書ける．

$z'e^{-2x}-2ze^{-2x}+2ze^{-2x}=3e^{4x}$

$z'e^{-2x}=3e^{4x}$

$\dfrac{dz}{dx}e^{-2x}=3e^{4x}$

$dz=3e^{4x}e^{2x}dx=3e^{6x}dx$

$\displaystyle\int dz=3\int e^{6x}dx$

$\displaystyle z=3\int e^{6x}dx$

$=\dfrac{1}{2}e^{6x}+C_4$

y に戻すと

$y=(\dfrac{1}{2}e^{6x}+C_4)e^{-2x}$

$y=\dfrac{1}{2}e^{4x}+Ce^{-2x}$ …(答)

♪==(3)または(3')は公式と割り切って直接代入する場合==♪

$P(x)=2$ だから，$u(x)=e^{-\int 2dx}=e^{-2x}$

$Q(x)=3e^{4x}$ だから，$\displaystyle\int\frac{3e^{4x}}{e^{-2x}}dx=3\int e^{6x}dx$

$=\dfrac{1}{2}e^{6x}+C$

したがって

$y=e^{-2x}\{\dfrac{1}{2}e^{6x}+C\}=\dfrac{1}{2}e^{4x}+Ce^{-2x}$ …(答)

※正しい 番号 をクリックしてください．

それぞれの問題は暗算では解けませんので，計算用紙が必要です．

※ブラウザによっては，番号枠の少し上の方が反応することがあります．

【問題1】

微分方程式 $y'-2y=e^{5x}$ の一般解を求めてください．

1 $y=\dfrac{1}{2}e^{3x}+Ce^{2x}$　2 $y=\dfrac{1}{3}e^{5x}+Ce^{2x}$

3 $y=\dfrac{1}{5}e^{6x}+Ce^{-2x}$　4 $y=\dfrac{1}{5}e^{3x}+Ce^{-2x}$

○ ヒント1 ヒント2 解答

≪同次方程式の解を求めて定数変化法を使う場合≫

同次方程式を解く:

$\dfrac{dy}{dx}=2y$

$\dfrac{dy}{y}=2dx$

【問題2】

微分方程式 $y'\cos x+y\sin x=1$ の一般解を求めてください．

1 $y=\sin x+C\cos x$　2 $y=\cos x+C\sin x$

3 $y=\sin x+C\tan x$　4 $y=\tan x+C\sin x$

○ ヒント1 ヒント2 解答

≪同次方程式の解を求めて定数変化法を使う場合≫

元の方程式は

$y'+y\tan x=\dfrac{1}{\cos x}$ と書ける．

そこで，同次方程式を解くと:

$\dfrac{dy}{dx}=-y\tan x$

$\dfrac{dy}{y}=-\tan x dx$

$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=-\int\tan x\,dx$

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}$ だから

$$\int \frac{dy}{y}=2\int dx$$

$$\log|y|=2x+C_1$$

$$|y|=e^{2x+C_1}=e^{C_1}e^{2x}=C_2e^{2x}$$

$$y=\pm C_2e^{2x}=C_3e^{2x}$$

そこで，元の非同次方程式の解を $y=z(x)e^{2x}$ の形で求める

積の微分法により $y'=z'e^{2x}+2e^{2x}z$ となるから

$$z'e^{2x}+2e^{2x}z-2ze^{2x}=e^{5x}$$

$$z'e^{2x}=e^{5x}$$

両辺を e^{2x} で割ると

$$z'=e^{3x}$$

$$z=\frac{1}{3}e^{3x}+C$$

≪(3)または(3')の結果を使う場合≫

$P(x)=-2$ だから，$u(x)=e^{-\int(-2)dx}=e^{2x}$

$Q(x)=e^{5x}$ だから，$\int \frac{Q(x)}{u(x)}dx=\int \frac{e^{5x}}{e^{2x}}dx=\int e^{3x}dx$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}+C$$

$y=e^{2x}(\frac{1}{3}e^{3x}+C)=\frac{1}{3}e^{5x}+Ce^{2x}$ になります．→ 2

$$\int \tan x\,dx=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$=-\log|\cos x|+C$$

$$\log|y|=\log|\cos x|+C_1$$

$$=\log|e^{C_1}\cos x|$$

$$|y|=|e^{C_1}\cos x|$$

$$y=\pm e^{C_1}\cos x$$

$$y=C_2\cos x$$

そこで，元の非同次方程式の解を $y=z(x)\cos x$ の形で求める

積の微分法により $y'=z'\cos x-z\sin x$ となるから

$$z'\cos x-z\sin x+z\cos x\ \tan x=\frac{1}{\cos x}$$

$$z'\cos x=\frac{1}{\cos x}$$

$$z'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$dz=\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$\int dz=\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$z=\tan x+C$$

$(\tan x)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{1}{\cos^2 x}$

だから

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$$

≪(3)または(3')の結果を使う場合≫

$P(x)=\tan x$ だから，

$u(x)=e^{-\int \tan x dx}=e^{\log|\cos x|}=|\cos x|$

その1つは $u(x)=\cos x$

$Q(x)=\frac{1}{\cos x}$ だから，$\int \frac{Q(x)}{u(x)}dx=\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$

$$=\tan x+C$$

$y=(\tan x+C)\cos x=\sin x+C\cos x$ になります．→ 1

【元に戻る】…よく使う

$e^{\log A}=A$

$\log e^A=A$

【問題3】

微分方程式 $xy'-y=2x^2+x$ の一般解を求めてください．

1 $y=x(x+\log|x|+C)$ 2 $y=x(2x+\log|x|+C)$

3 $y=x(x+2\log|x|+C)$ 4 $y=x(x^2+\log|x|+C)$

○ ヒント1 ヒント2 解答

≪同次方程式の解を求めて定数変化法を使う場合≫

元の方程式は

$y'-\frac{1}{x}y=2x+1$ と書ける．

同次方程式を解く:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y}=\int \frac{dx}{x}$$

$$\log|y|=\log|x|+C_1=\log|x|+\log e^{C_1}=\log|e^{C_1}x|$$

$$|y|=|e^{C_1}x|$$

$$y=\pm e^{C_1}x=C_2x$$

そこで，元の非同次方程式の解を $y=z(x)x$ の形で求める

積の微分法により $y'=z'x+z$ となるから

$$z'x+z-\frac{zx}{x}=2x+1$$

$$z'x=2x+1$$

両辺を x で割ると

$$z'=2+\frac{1}{x}$$

【問題4】

微分方程式 $y'+y=\cos x$ の一般解を求めてください．

1 $y=(\frac{\sin x+\cos x}{2}+C)e^{-x}$

2 $y=(\frac{\sin x-\cos x}{2}+C)e^{-x}$

3 $y=\frac{\sin x+\cos x}{2}+Ce^{-x}$

4 $y=\frac{\sin x-\cos x}{2}+Ce^{-x}$

○ ヒント1 ヒント2 解答

≪同次方程式の解を求めて定数変化法を使う場合≫

同次方程式を解く:

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\frac{dy}{y}=-dx$$

$$\int \frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\log|y|=-x+C_1$$

$$=\log e^{-x+C_1}=\log(e^{C_1}e^{-x})$$

$$|y|=e^{C_1}e^{-x}$$

$$y=\pm e^{C_1}e^{-x}=C_2e^{-x}$$

そこで，元の非同次方程式の解を $y=z(x)e^{-x}$ の形で求める

積の微分法により

$y'=z'e^{-x}-ze^{-x}$ となるから

$$z'e^{-x}-ze^{-x}+ze^{-x}=\cos x$$

$I=\int e^x\cos x\,dx$ は，次のように部分積分を(同じ向きに)2回行うことにより I を I で表すことができ，これを「方程式風に」解くことによって求めることができます．

$f=e^x$	$f'=e^x$
$g'=\cos x$	$g=\sin x$

$$I=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$$

$p=e^x$	$p'=e^x$
$q'=\sin x$	$q=-\cos x$

$$I=e^x\sin x$$

$$-\{-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx\}$$

$z=2x+\log|x|+C$

≪(3)または(3')の結果を使う場合≫

元の方程式は

$y'-\frac{1}{x}y=2x+1$ と書ける．

$P(x)=-\frac{1}{x}$ だから，$u(x)=e^{-\int P(x)dx}=e^{\log|x|}=|x|$

その1つは $u(x)=x$

$Q(x)=2x+1$ だから，$\int\frac{Q(x)}{u(x)}dx=\int\frac{2x+1}{x}dx=\int(2+\frac{1}{x})dx$

$=2x+\log|x|+C$

$y=(2x+\log|x|+C)x$ になります．→2

$z'e^{-x}=\cos x$

$z'=e^{x}\cos x$

$z=\int e^{x}\cos x\,dx$

$=e^{x}\sin x+e^{x}\cos x-I$

$2I=e^{x}\sin x+e^{x}\cos x$

$I=\frac{e^{x}}{2}(\sin x+\cos x)+C$

右の解説により

$z=\frac{e^{x}}{2}(\sin x+\cos x)+C$

≪(3)または(3')の結果を使う場合≫

$P(x)=1$ だから，$u(x)=e^{-\int P(x)dx}=e^{-x}$

$Q(x)=\cos x$ だから，$\int\frac{Q(x)}{u(x)}dx=\int e^{x}\cos x\,dx$

$=\frac{e^{x}}{2}(\sin x+\cos x)+C$

$y=\frac{\sin x+\cos x}{2}+Ce^{-x}$ になります．→3

○ 微分方程式の解は，$y=f(x)$ の形の y について解かれた形（陽関数）になるものばかりでなく，$x^2+y^2=C$ のような陰関数で表されるものもあります．もちろん，$x=f(y)$ の形で x が y で表される場合もありえます．
　そうすると，場合によっては x を y の関数として解くことも考えられます．

【例題3】

微分方程式 $(y-x)y'=1$ の一般解を求めてください．

（解答）

この方程式は，$y'=\frac{1}{y-x}$ と変形できますが，変数分離形でもなく線形微分方程式の形にもなっていません．

yとy'が掛け算になっているものは線形ではない

しかし，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y-x}$ → $\frac{dx}{dy}=y-x$ → $x'+x=y$

と変形すると，x についての線形微分方程式になっており，これを解けば x が y で表されます．

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y-x}$ → $\frac{dx}{dy}=y-x$ → $x'+x=y$ と変形すると x が y の線形方程式で表されることになるので，これを解きます．

同次方程式：$\frac{dx}{dy}=-x$ を解くと

$\frac{dx}{x}=-dy$

$\int\frac{dx}{x}=-\int dy$

$\log|x|=-y+C_1$

$|x|=e^{-y+C_1}=e^{C_1}e^{-y}$

$x=\pm e^{C_1}e^{-y}=C_2e^{-y}$

非同次方程式の解を $x=z(y)e^{-y}$ の形で求める

積の微分法により x&apos=$z'e^{-y}-ze^{-y}$ となるから，元の微分方程式は

$z'e^{-y}-ze^{-y}+ze^{-y}=y$

$z'e^{-y}=y$

両辺に e^y を掛けると

$z'=ye^{y}$

$z=\int ye^{y}dy$

$=ye^{y}-e^{y}+C$

したがって，解は

$x=(ye^{y}-e^{y}+C)e^{-y}$

$=y-1+Ce^{-y}$

$I=\int ye^{y}dx$ は，次のように部分積分で求めることができます．

$f=y$	$f'=1$
$g'=e^{y}$	$g=e^{y}$

$I=ye^{y}-\int e^{y}dy=ye^{y}-e^{y}+C$

【問題5】

微分方程式 $(y^2+x)y'=y$ の一般解を求めてください．

1 $x=y+Cy^2$　　2 $x=y^2+Cy$

3 $x=y+\log|y|+C$　　4 $x=y\log|y|+C$

○ ヒント1 ヒント2 解答

≪同次方程式の解を求めて定数変化法を使う場合≫

$(y^2+x)\frac{dy}{dx}=y$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y^2+x}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{y^2+x}{y}=y+\frac{x}{y}$

$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=y$ …(1)

と変形すると，変数 y の関数 x が線形方程式で表される．

同次方程式を解く：

$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$

$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$

$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y}$

$\log|x|=\log|y|+C_1=\log|y|+\log e^{C_1}=\log|e^{C_1}y|$

$|x|=|e^{C_1}y|$

$x=\pm e^{C_1}y=C_2y$

そこで，元の非同次方程式(1)の解を $x=z(y)y$ の形で求める

積の微分法により

$x'=z'y+z$ となるから

$z'y+z-z=y$

$z'y=y$

$z'=1$

$z=\int dy=y+C$

≪(3)または(3')の結果を使う場合≫

$P(y)=-\frac{1}{y}$ だから，$u(y)=e^{-\int P(y)dy}=e^{\log|y|}=|y|$

$Q(y)=y$ だから，$\int\frac{Q(y)}{u(y)}dy=\int dy=y+C$

（$u(y)=y$ $(y>0)$ の場合でも $u(y)=-y$ $(y<0)$ の場合でも，結果は同じになります．）

$x=(y+C)y=y^2+Cy$ になります．→2

【問題6】

微分方程式 $(e^y-x)y'=y$ の一般解を求めてください.

1 $x=y(e^y+C)$　　2 $x=e^y-Cy$

3 $x=\dfrac{e^y}{y+C}$　　4 $x=\dfrac{e^y+C}{y}$

○ ヒント1 ヒント2 解答

≪同次方程式の解を求めて定数変化法を使う場合≫

$$(e^y-x)\frac{dy}{dx}=y$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{e^y-x}$$
$$\frac{dx}{dy}=\frac{e^y-x}{y}=\frac{e^y}{y}-\frac{x}{y}$$
$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}=\frac{e^y}{y}\cdots(1)$$

と変形すると, 変数 y の関数 x が線形方程式で表される.

同次方程式を解く:

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{x}{y}$$
$$\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}$$
$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{dy}{y}$$
$$\log|x|=-\log|y|+C_1$$
$$\log|x|+\log|y|=C_1$$
$$\log|xy|=C_1$$
$$|xy|=e^{C_1}$$
$$xy=\pm e^{C_1}=C_2$$

そこで, 元の非同次方程式(1)の解を $x=\dfrac{z(y)}{y}$ の形で求める

商の微分法により

$x'=\dfrac{z'y-z}{y^2}$ となるから

$$\frac{z'y-z}{y^2}+\frac{x}{y}=\frac{e^y}{y}$$
$$\frac{z'y-z}{y^2}+\frac{z}{y^2}=\frac{e^y}{y}$$
$$\frac{z'}{y}=\frac{e^y}{y}$$
$$z'=e^y$$
$$z=\int e^y dy=e^y+C$$

≪(3)または(3')の結果を使う場合≫

$P(y)=\dfrac{1}{y}$ だから, $u(y)=e^{-\int P(y)dy}=e^{-\log|y|}=\dfrac{1}{|y|}$

1つの解は $u(y)=\dfrac{1}{y}$

$Q(y)=\dfrac{e^y}{y}$ だから, $\displaystyle\int\frac{Q(y)}{u(y)}dy=\int e^y dy=e^y+C$

$x=\dfrac{e^y+C}{y}$ になります. →4

【問題7】

微分方程式 $(x+2y\log y)y'=y\ (y>0)$ の一般解を求めてください.

1 $x=\dfrac{\log y}{y}+C$　　2 $x=\dfrac{(\log y)^2}{y}+C$

3 $x=y(\log y+C)$　　4 $x=y((\log y)^2+C)$

○ ヒント1 ヒント2 解答

≪同次方程式の解を求めて定数変化法を使う場合≫

$$(x+2y\log y)\frac{dy}{dx}=y$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+2y\log y}$$
$$\frac{dx}{dy}=\frac{x+2y\log y}{y}=\frac{x}{y}+2\log y$$
$$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=2\log y\cdots(1)$$

と変形すると, 変数 y の関数 x が線形方程式で表される.

同次方程式を解く:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}$$
$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$
$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dy}{y}$$
$$\log|x|=\log|y|+C_1$$
$$\log|x|=\log|y|+e^{C_1}$$
$$\log|x|=\log|e^{C_1}y|$$
$$|x|=|e^{C_1}y|$$
$$x=\pm e^{C_1}y=C_2y$$

そこで, 元の非同次方程式(1)の解を $x=z(y)y$ の形で求める

積の微分法により

$x'=z'y+z$ となるから

$$z'y+z-z=2\log y$$
$$z'y=2\log y$$
$$z'=\frac{2\log y}{y}$$
$$z=2\int\frac{\log y}{y}dy$$
$$=2\left(\frac{(\log y)^2}{2}+C_3\right)$$
$$=(\log y)^2+C$$

$\displaystyle\int\frac{\log y}{y}dy$ は $t=\log y$ とおく置換積分で計算できます.

$$t=\log y$$
$$\frac{dt}{dy}=\frac{1}{y}$$
$$dy=y\,dt$$
$$\int\frac{\log y}{y}dy=\int\frac{t}{y}y\,dt$$
$$=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}+C$$
$$=\frac{(\log y)^2}{2}+C$$

≪(3)または(3')の結果を使う場合≫

$P(y)=-\dfrac{1}{y}$ だから, $u(y)=e^{-\int P(y)dy}=e^{\log y}=y$

1つの解は $u(y)=\dfrac{1}{y}$

$Q(y)=2\log y$ だから, $\displaystyle\int\frac{Q(y)}{u(y)}dy=2\int\frac{\log y}{y}dy$

$=2\left(\dfrac{(\log y)^2}{2}+C_3\right)=(\log y)^2+C$

$x=y(\log y)^2+C)$ になります. →4