== リッカチ形 微分方程式 ==

■リッカチ形の微分方程式

次の形の微分方程式はリッカチの微分方程式とよばれ，1つの特別解（特殊解）y_1 を見つけると，$y=y_1+u$ とおくことにより u がベルヌーイの微分方程式になります．

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y^2+Q(x)y+R(x)=0 \cdots(1)$$

（解説）

(1)の1つの特別解を y_1 とすると

$$\frac{dy_1}{dx}+P(x)y_1^{\,2}+Q(x)y_1+R(x)=0 \cdots(2)$$

が成り立つ．

ここで，$y=y_1+u$ とおくと(1)は次の形になります．

$$\left(\frac{dy_1}{dx}+\frac{du}{dx}\right)+P(x)(y_1+u)^2+Q(x)(y_1+u)+R(x)=0$$

$$\frac{dy_1}{dx}+\frac{du}{dx}+P(x)y_1^{\,2}+2P(x)y_1u+P(x)u^2$$
$$+Q(x)y_1+Q(x)u+R(x)=0$$

$$\frac{dy_1}{dx}+P(x)y_1^{\,2}+Q(x)y_1+R(x)$$
$$+\frac{du}{dx}+2P(x)y_1u+P(x)u^2+Q(x)u=0$$

(2)により青で示した項は消えるから

$$\frac{du}{dx}+2P(x)y_1u+P(x)u^2+Q(x)u=0$$

こんな式を
覚える必要はない
↓
$R(x)$ の項が消える
ことを
目で確かめるだけでよい

したがって

$$\frac{du}{dx}+(2P(x)y_1+Q(x))u=-P(x)u^2$$

これは，既知の関数 $S(x)=2P(x)y_1+Q(x)$, $T(x)=-P(x)$ とおけば

$$\frac{du}{dx}+S(x)u=T(x)u^2$$

の形に表されているからベルヌーイ形の微分方程式になります．したがって，ベルヌーイ形の微分方程式の解き方に沿って解けば一般解が求められます．

【例1】

$\frac{dy}{dx}+y^2+2y-3=0$ の一般解を求めてください．

$P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ が定数項である場合には，変数分離形として解くことができます（後出参考）が，ここでは「特別解の見当を付ける」ための簡単な例としてリッカチ形として解いてみます．

（解答）

$y_1=k$（定数）の場合は，$y'=0$ となるから，この方程式の特別解は2次方程式

$$y^2+2y-3=0$$

を解くことによって得られます．

$$(y+3)(y-1)=0$$

により，例えば

$$y_1=1$$

が1つの特別解になります．（$y_1=-3$ でもよい）

$y=1+u \cdots(1)$とおいて元の方程式に代入すると

$$\frac{du}{dx}+4u+u^2=0$$

$$\frac{du}{dx}+4u=-u^2 \cdots(2)$$

はベルヌーイ形の微分方程式になります．（変数分離形としても解けます）

(2)の両辺を u^2 で割ると

$$u^{-2}\frac{du}{dx}+4u^{-1}=-1 \cdots(3)$$

$v=u^{-1}$ とおくと

$$\frac{dv}{dx}=-u^{-2}\frac{du}{dx}$$

（参考）

初めの微分方程式を変数分離形として解くと，次のようになります．

$$\frac{dy}{dx}=-(y^2+2y-3)$$

$$\frac{dy}{y^2+2y-3}=-dx$$

$$\int\frac{dy}{(y+3)(y-1)}=-\int dx$$

$$\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+3}\right)dy=-x+C_1$$

$$\log\left|\frac{y-1}{y+3}\right|=-4x+4C_1=-4x+C_2$$

$$\left|\frac{y-1}{y+3}\right|=-4x+4C_1=e^{-4x+C_2}=e^{C_2}e^{-4x}$$

$$\frac{y-1}{y+3}=\pm e^{C_2}e^{-4x}=C_3\,e^{-4x}$$

$$y-1=(y+3)C_3\,e^{-4x}=C_3\,e^{-4x}y+3C_3\,e^{-4x}$$

$$C_3\,e^{-4x}y-y=-3C_3\,e^{-4x}-1$$

$$(C_3\,e^{-4x}-1)y=-3C_3\,e^{-4x}-1$$

$$y=-\frac{3C_3e^{-4x}+1}{C_3e^{-4x}-1}=-\frac{3C_3+e^{4x}}{C_3-e^{4x}}=\frac{e^{4x}+3C}{e^{4x}-C}$$

この式において $1/C$ を C とすると左記の答と一致します．

【例2】

$\frac{dy}{dx}+(2x+3)y-(x+2)y^2=x+1$ の一般解を求めてください．

（略解）

$y_1=1$ は方程式を満たすから1つの特別解になっています．

そこで，$y=1+u$ とおくと，元の方程式は u についてベルヌーイ形の微分方程式になります．

$$\frac{du}{dx}-u=(x+2)u^2$$

両辺を u^2 で割ると

$$u^{-2}\frac{du}{dx}-u^{-1}=x+2$$

ここで $v=u^{-1}$ とおくと v の線形微分方程式になります．

$$\frac{dv}{dx}+v=-x-2$$

この方程式の右辺を0とおいた同次方程式の解は

$$v=C_1\,e^{-x}$$

となるので，定数変化法により元の非同次方程式の解を

$$v=z(x)e^{-x}$$

の形で求めます．

$$z=C-(x+1)e^x$$

となるから，

$$v=(C-(x+1)e^x)e^{-x}=Ce^{-x}-x-1$$

$$\frac{1}{u}=Ce^{-x}-x-1$$

$$u=\frac{1}{Ce^{-x}-x-1}$$

$$y=1+u=1+\frac{1}{Ce^{-x}-x-1}=\frac{Ce^{-x}-x}{Ce^{-x}-x-1}$$

最後の形は，分母分子に e^x を掛けた形で答えてもよい．

$$y=\frac{C-xe^x}{C-(x+1)e^x}=\frac{xe^x-C}{(x+1)e^x-C}=\frac{xe^x+C'}{(x+1)e^x+C'}$$

【例3】

$\frac{dy}{dx}-e^{-x}y^2+y-e^x=0$ の一般解を求めてください．

（略解）

1つの特別解を求めるには $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ の形から類推して，幾つか試します．

$y_1=e^x$ は方程式を満たすから1つの特別解になっています．

そこで，$y=e^x+u$ とおくと，元の方程式は u についてベルヌーイ

となるから

$$-\frac{dv}{dx}+4v=-1$$

$$\frac{dv}{dx}-4v=1 \cdots(4)$$

(この方程式も変数分離形としても解けますが)ここでは定数変化法の復習を兼ねて線形微分方程式として解いてみます.

(4)に対応する同次方程式

$$\frac{dv}{dx}-4v=0$$

の解を求めると

$$v=C_1 e^{4x}$$

になるから，定数変化法により(4)の解を $v=z(x)e^{4x}$ …(5)
の形で求めます.

積の微分法により

$$v'=z'e^{4x}+4ze^{4x}$$

だから，(4)は次の形になります.

$$\frac{dz}{dx}e^{4x}+4ze^{4x}-4ze^{4x}=1$$

$$\frac{dz}{dx}e^{4x}=1$$

$$\frac{dz}{dx}=e^{-4x}$$

$$dz=e^{-4x}dx$$

$$\int dz=\int e^{-4x}dx$$

$$z=-\frac{1}{4}e^{-4x}+C_2$$

(5)に戻すと

$$v=(-\frac{1}{4}e^{-4x}+C_2)e^{4x}=-\frac{1}{4}+C_2 e^{4x}$$

u に戻すと

$$\frac{1}{u}=\frac{4C_2e^{4x}-1}{4}=\frac{Ce^{4x}-1}{4}$$

$$u=\frac{4}{Ce^{4x}-1}$$

さらに(1)により y に戻すと

$$y=1+\frac{4}{Ce^{4x}-1}=\frac{Ce^{4x}+3}{Ce^{4x}-1} \cdots (答)$$

右へ→

形の微分方程式になります.

$$\frac{du}{dx}-u=e^{-x}u^2$$

両辺を u^2 で割ると

$$u^{-2}\frac{du}{dx}-u^{-1}=e^{-x}$$

ここで $v=u^{-1}$ とおくと v の線形微分方程式になります.

$$\frac{dv}{dx}+v=-e^{-x}$$

この方程式の右辺を0とおいた同次方程式の解は

$$v=C_1 e^{-x}$$

となるので，定数変化法により元の非同次方程式の解を

$$v=z(x)e^{-x}$$

の形で求めます.

$$z=-x+C$$

となるから，

$$v=(-x+C)e^{-x}$$

$$u=\frac{1}{(-x+C)e^{-x}}=\frac{e^x}{C-x}$$

$$y=e^x+u=e^x+\frac{e^x}{C-x}$$

【問題1】

微分方程式 $\frac{dy}{dx}+y^2-3y+2=0$ の一般解を求めてください.

1 $y=\frac{e^x+C}{2e^x+C}$　　2 $y=\frac{2e^x+C}{e^x+C}$

3 $y=\frac{e^x-C}{2e^x+C}$　　4 $y=\frac{2e^x+C}{e^x-C}$

【問題2】

微分方程式 $y'-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x}=4x$ の一般解を求めてください.

1 $y=x+\frac{x}{Ce^x+1}$　　2 $y=x+\frac{2x}{Ce^x-1}$

3 $y=2x+\frac{2x}{Ce^{2x}-1}$　　4 $y=2x+\frac{4x}{Ce^{4x}-1}$

【問題3】

微分方程式 $y'+e^x y^2+y-e^{-x}=0$ の一般解を求めてください．

1 $y=e^{-x}+\dfrac{2e^{-x}}{Ce^{2x}-1}$

2 $y=e^{-x}+\dfrac{2e^{x}}{Ce^{2x}+1}$

3 $y=e^{x}+\dfrac{2e^{-x}}{Ce^{2x}-1}$

4 $y=e^{x}+\dfrac{2e^{x}}{Ce^{2x}+1}$

【問題4】

$\int \dfrac{e^x}{x}dx=Ei\,x+C$ とするとき，次の微分方程式の一般解を $Ei\,x$ を用いて表してください．

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y^2}{x}+y=1$$

1 $y=x+\dfrac{Ei\,x}{e^x-C}$

2 $y=x+\dfrac{Ei\,x}{e^{-x}-C}$

3 $y=x+\dfrac{e^x}{C-Ei\,x}$

4 $y=x+\dfrac{e^{-x}}{C-Ei\,x}$