== 全微分方程式 ==

■全微分とは

2変数の関数 $z=F(x, y)$ について，x, y の増分を $\Delta x, \Delta y$ とするとき，z の増分 Δz は

$$\Delta z \fallingdotseq \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

で表されます．

この式において，$\Delta x\rightarrow 0, \Delta y\rightarrow 0$ となる極限を形式的に

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \cdots(1)$$

で表し，dz を z の**全微分**といいます．

$\frac{\partial z}{\partial x}$ は z の x に関する偏導関数で，y を定数と見なして，x で微分したものを表し，x 方向の傾きに対応します．

同様にして，$\frac{\partial z}{\partial y}$ は z の y に関する偏導関数で，x を定数と見なして，y で微分したものを表し，y 方向の傾きに対応します．

(1)式の形は，変数分離形の微分方程式を解く途中経過において，今までに何度も登場しています．

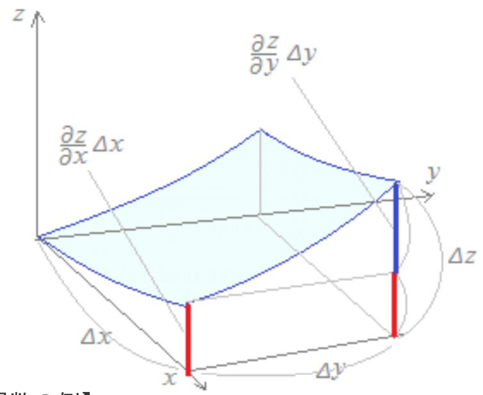
例えば

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}$$

$$y\ dy=-2\ dx$$

$$2x\ dx+y\ dy=0$$

の変形において,『形式的に分母を払って』変形する場合においても，このような式が登場しています．



【偏導関数の例】

$z=x^3y^2$ のとき，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2 ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y$$

【全微分の例】

$z=x^3y^2$ のとき，

$$dz=3x^2y^2dx+2x^3ydy$$

■全微分方程式，完全微分形とは

微分方程式が

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \cdots(2)$$

の形で与えられているとき，この微分方程式を**全微分方程式**といいます．

(2)の形の全微分方程式で，$P(x,y)$, $Q(x,y)$ が1つの関数 $F(x,y)$ の x 偏導関数と y 偏導関数になっているとき，すなわち

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y) ,\ \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$$

が成り立っているとき，この微分方程式は**完全微分形**と呼ばれます．

完全微分形の微分方程式の一般解は

$$F(x,y)=C \cdots(3)$$

で与えられます．

【全微分がつねに0になる場合】

全微分がつねに0になる場合，すなわち

$$dF=0$$

になる場合は，F は定数になります．したがって，$dF=0$ の解は

$$F(x,y)=C \ (\ C \text{は任意定数})$$

と言えます．

このように,全微分方程式が完全微分形になっていて，これを満たす関数 $F(x,y)$ が見つかる場合，全微分方程式の一般解は直ちに求まります．

例えば，全微分方程式

$$(3x^2y^2)dx+(2x^3y)dy=0$$

については，$F(x,y)=x^3y^2$ を想定すると，完全微分形であることが分かるので，この微分方程式の一般解は

$$x^3y^2=C$$

になります．

※　通常の場合には，上記のような関数 $F(x,y)$ が簡単に見つかるとは限らないので

(1) 完全微分形である場合に，$F(x,y)$ を見つける方法は？

(2) 完全微分形になっていない全微分方程式を変形して完全微分形に直す方法は？

の2点がこの頁のテーマになります．

【例題1】

微分方程式 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$ すなわち $xdx-ydy=0$ を

(1) 変数分離形として解いてください．

(2) 全微分方程式として解いてください．

(1)変数分離形として解く:

$$y\ dy=x\ dx$$

$$\int y\ dy=\int x\ dx$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C_1$$

$$y^2-x^2=2C_1=C \cdots(\text{答})$$

(2)全微分方程式として解く:

○　変数分離形の微分方程式としても解釈できる問題を，変数分離形として解く場合と，全微分方程式として解く場合とでは，別々に積分するかまとめて積分するかの違いがあります．

$F(x,y)=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}$ とおくと

$$\frac{\partial F}{\partial x}=x\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y}=-y$$

となるから

$F(x,y)=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}$ について

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

は完全微分形になる.

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=C_1$$

$x^2-y^2=C$ …(答)

【例題2】

微分方程式 $e^x \sin y\ dx+e^x \cos y\ dy=0$ を
(1) 変数分離形として解いてください.
(2) 全微分方程式として解いてください.

(1)変数分離形として解く:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin y}{\cos y}$$

$$\frac{\cos y}{\sin y}dy=-dx$$

$$\int \frac{(\sin y)'}{\sin y}dy=-\int dx$$

$$\log|\sin y|=-x+C_1$$

$$|\sin y|=e^{-x+C_1}=e^{C_1}e^{-x}$$

$$\sin y=\pm e^{C_1}e^{-x}=Ce^{-x}$$

$e^x \sin y=C$ …(答)

(2)全微分方程式として解く:

$F(x,y)=e^x \sin y$ とおくと

$$\frac{\partial F}{\partial x}=e^x \sin y\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y}=e^x \cos y$$

となるから

$F(x,y)=e^x \sin y$ について

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

は完全微分形になるから

$e^x \sin y=C$ …(答)

○ 変数分離形の微分方程式を変数分離形として解く場合には

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

という問題は

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

ただし, 行きがかり上
$\int g(y)dy$ ではなく $\int \frac{dy}{g(y)}$
を $G(y)$ と定義していることに注意

ここで

$\int \frac{dy}{g(y)}=G(y)\ ,\ \int f(x)dx=F(x)$ とおくと

$G(y)=F(x)+C_1$ …(A)

という形で「各々の積分を別々に求めている」ことになります.

○ 同じ問題を全微分方程式として解く場合には

$$f(x)dx+(-\frac{dy}{g(y)})=0$$

$\int f(x)dx=F(x)\ ,\ \int \frac{dy}{g(y)}=G(y)$ とおくと

$Z(x,y)=F(x)-G(y)$ という関数について

$\frac{\partial z}{\partial x}=f(x)\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{g(y)}$ になっているから

全微分方程式は

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=0$$

になり, 一般解は

$F(x)-G(y)=C_2$ …(B)

になります.

○ (A)と(B)は $C_2=-C_1$ とすれば同じものを表しています.

【問題1】

次の微分方程式は完全微分形になっています.
積分形 $F(x,y)$ の見当をつけて一般解を求めてください.

$$y^3dx+3xy^2dy=0$$

1 $x+y^3=C$	2 $3x+y^2=C$
3 $xy^3=C$	4 $x^2y^3=C$

【問題2】

次の微分方程式は完全微分形になっています.
積分形 $F(x,y)$ の見当をつけて一般解を求めてください.

$$(y+2x)dx+xdy=0$$

1 $x+y^2=C$	2 $xy+x^2=C$
3 $2xy=C$	4 $x^2y=C$

■完全微分形であるための必要十分条件

(1)

全微分方程式

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

が完全微分形となっているための必要十分条件は

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

が成立することである.

○ ここまでに示した例では, 全微分方程式が完全微分形になっている場合を取り上げましたが, いつもそうであるとは限りません.
与えられた $P(x), Q(x)$ が少し変わるだけで完全微分形になるかどうかが変わります.

【例】

(1.1) $(3x^2y^2)dx+(2x^3y)dy=0$ → ○(完全微分形)

(1.2) $(3xy^2)dx+(2x^2y)dy=0$ → ×(完全微分形ではない)

(1.3) $(3x^3y^2)dx+(2x^4y)dy=0$ → ×(完全微分形ではない)

【例】

(2.1) $y^3dx+3xy^2dy=0$ → ○(完全微分形)

(2)

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

が完全微分形であるとき，その一般解は

$$\int P(x,y)dx+\int\left(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right)dy=C$$

で求められる.

---

(3) は下に分けて示す.

(1)の証明

完全微分形ならば，ある関数 $F(x,y)$ が存在して

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)\ ,\ \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$$

が成り立つはずです.

ここで扱っている関数は，連続で微分可能なものばかりを想定しているので，偏微分の順序交換が可能です．すなわち，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}$$

が成り立ちます．したがって

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial P}{\partial y}$$

の2つは等しく

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

が成り立ちます．■

逆に，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

が成り立つとき，完全微分形であることは次のようにして示されます.

$$F(x,y)=\int P(x,y)dx+C$$

とおく．ここで，通常ならば C は任意定数ですが，x で偏微分したときに消えるためには y の関数であってもよいので，$C(y)$ とします．すなわち

$$F(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)\ \cdots\text{(A)}$$

この $C(y)$ を次の条件を使って求めとよい.

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)\ \cdots\text{(B)}$$

(A)と(B)の条件を満たせば，完全微分形になることが言えます.

(A)により

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)$$

(B)により

$$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$$

したがって，与えられた全微分方程式の左辺は $F(x,y)$ の全微分になっています．…■(1)の証明完了

(A)を(B)に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx+C'(y)=Q(x,y)$$

$$C'(y)=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx$$

$$C(y)=\int\left(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right)dy$$

以上をまとめると

$$F(x,y)=\int P(x,y)dx+\int\left(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right)dy$$

したがって，一般解は

(2.2)　$y^2dx+3xydy=0$ → ×（完全微分形ではない）

(2.3)　$y^4dx+3xy^3dy=0$ → ×（完全微分形ではない）

そこで，全微分方程式を解くためには，次の点が重要になります.

(1) 与えられた全微分方程式が完全微分形であるかどうかを見分ける方法

⇒完全微分形になっていれば，上で練習したような積分 $F(x,y)$ を見つけられる可能性がありますが，そうでなければ探す努力が無駄になるからです

(2) 完全微分形である場合の一般解の求め方

⇒ここまでに示したものは比較的簡単に積分 $F(x,y)$ が見つけられるものばかりでしたが，複雑な式になるともっと系統的に見つける方法がないと対応できません

(3) 完全微分形でないときに，微分方程式の両辺に掛ければ完全微分形に変形できるような因子 $M(x,y)$ の見つけ方

⇒1.2や1.3を1.1に変形するには，各々の両辺に $M(x,y)=x,\ 1/x$ を掛ければよい.

2.2や2.3を2.1に変形するには，各々の両辺に $M(x,y)=y,\ 1/y$ を掛ければよい.

このように，全微分方程式の両辺に適当な関数 $M(x,y)$ を掛ければ全微分形にできるとき，$M(x,y)$ は**積分因子**と呼ばれます．この積分因子の見つけ方が分かれば全微分方程式が解けることになります.

【例題3】

微分方程式 $(2x-3y)dx+(4y-3x)dy=0$ を解いてください.

（解答）

○ 完全微分形であることを確認する

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x-3y)=-3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(4y-3x)=-3$$

の2つが等しいから，完全微分形になっている.

○ 一般解を求める

$$\int P(x,y)dx=\int(2x-3y)dx=x^2-3xy$$

$$Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx=(4y-3x)-(-3x)=4y$$

$$\int\left(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right)dy=\int 4ydy=2y^2$$

ゆえに

$x^2-3xy+2y^2=C$ …（答）

【例題4】

微分方程式 $2xydx+(x^2-2y)dy=0$ を解いてください.

（解答）

○ 完全微分形であることを確認する

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2-2y)=2x$$

の2つが等しいから，完全微分形になっている.

○ 一般解を求める

$$\int P(x,y)dx=\int 2xydx=x^2y$$

$$\int P(x,y)dx+\int\left(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right)dy=C$$

…■(2)が示された

$$Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx=(x^2-2y)-x^2=-2y$$

$$\int\left(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right)dy=\int(-2y)dy=-y^2$$

ゆえに

$x^2y-y^2=C$…(答)

【問題3】

微分方程式 $(2x+y)dx+xdy=0$ の一般解を求めてください.

1 $x^2+xy=C$　　2 $xy+y^2=C$

3 $x^2+2xy=C$　　4 $y^2-2xy=C$

【問題4】

微分方程式 $(2x+3y)dx+(3x-2)dy=0$ の一般解を求めてください.

1 $x^2-3xy+2y=C$　　2 $x^2+3xy-2y=C$

3 $x^2-2xy+3y^2=C$　　4 $x^2+2xy-3y^2=C$

【問題5】

微分方程式 $(\sin y-\sin x)dx+x\cos ydy=0$ の一般解を求めてください.

1 $x\sin y+\cos x=C$　　2 $y\sin x+\cos x=C$

3 $x\cos y-\sin x=C$　　4 $y\cos x-\sin y=C$

【問題6】

微分方程式 $ye^xdx+(e^x-\cos y)dy=0$ の一般解を求めてください.

1 $xe^x+\sin y=C$　　2 $xe^x-\cos y=C$

3 $ye^x-\sin y=C$　　4 $ye^x+\cos y=C$

(3)　■積分因子の利用

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

が完全微分形でなくても，適当な関数 $M(x,y)$ を掛けると

$$M(x,y)P(x,y)dx+M(x,y)Q(x,y)dy=0$$

[1]の手順で x だけの関数になっている積分因子 $M(x)$ が求まらないときは，同様の手順で y だけの関数になっているもの $M(y)$ を探すことになります.

[2]　もし y だけの関数になっているもの $M(y)$ が積分因子になっていれば

が完全微分形になることがあります．
このとき $M(x,y)$ を**積分因子**といいます．

積分因子を一般的に求めるのは難しく，積分因子がただ1通りに定まるとも限りません．
しかし，積分因子 $M(x,y)$ が x だけの関数になっているもの $M(x)$ や y だけの関数になっているもの $M(y)$ があれば，次のようにして求められます．
積分因子が1つでも見かれば，それを使って解けばよいので，y だけの関数になっているもの $M(y)$ は $M(x)$ が求まらないときに考えればよいでしょう．

（解説）
もし，元の全微分方程式
$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$
が完全微分形でなければ
$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\neq 0 \cdots(4)$$

このとき，
[1] もし x だけの関数になっているもの $M(x)$ が積分因子になっていれば
$$\frac{\partial}{\partial y}(M(x)P(x,y))-\frac{\partial}{\partial x}(M(x)Q(x,y))=0 \cdots(5)$$
$M(x)$ は x だけの関数としているから，(5)は次のように変形できる．
$$M\frac{\partial P}{\partial y}-(M'Q+M\frac{\partial Q}{\partial x})=0$$
$$M(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})=M'Q$$
$$\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})=\frac{M(x)'}{M(x)} \cdots(6)$$

左のように未知の関数 $M(x)$ を既知の関数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ で表して，$M(x)$ を求めていく

【重要】 この(6)式において，左辺が x だけの関数になっていれば，以下のように変形して積分因子 $M(x)$ が求められます．しかし，左辺が x だけの関数になっていなければ，（右辺は x だけの関数なので）この形で求めることはできないと判断します．

$$\int \frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})dx=\int \frac{M(x)'}{M(x)}dx=\log M(x) \cdots(7)$$
指数・対数の関係：$x=\log M \Leftrightarrow e^x=M$
により，(6)式の左辺を計算しておいて（□とする）
$$M(x)=e^{\square}$$
とすれば，積分因子 $M(x)$ が求まったことになります． 右へ続く→

$$\frac{\partial}{\partial y}(M(y)P(x,y))-\frac{\partial}{\partial x}(M(y)Q(x,y))=0 \cdots(5')$$
$M(y)$ は y だけの関数としているから，(5')は次のように変形できる．
$$(M'P+M\frac{\partial P}{\partial y})-M\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$
$$M(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})=M'P$$
$$\frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})=\frac{M(y)'}{M(y)} \cdots(6')$$

【重要】 この(6')式において，左辺が y だけの関数になっていれば，以下のように変形して積分因子 $M(y)$ が求められます．

$$\int \frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dy=\int \frac{M(y)'}{M(y)}dy=\log M(y) \cdots(7')$$
指数・対数の関係：$x=\log M \Leftrightarrow e^x=M$
により，(6)式の左辺を計算しておいて（□とする）
$$M(y)=e^{\square}$$
とすれば，積分因子 $M(y)$ が求まったことになります．

[3] x だけの関数となる積分因子，y だけの関数となる積分因子がいずれも見つからない場合でも，$P(x,y)$, $Q(x,y)$ が多項式である場合には，$M(x,y)=x^m y^n$ とおいて，次数 m, n に関する方程式として係数比較法で解ける場合があります．

下記の【例題6】において求める積分因子を $M(x,y)=x^m y^n$ とおくと，次のようにして次数 m, n が定まります．
$$x^m y^n ydx+x^m y^n(2x+y)dy=0$$
$$x^m y^{n+1}dx+(2x^{m+1}y^n+x^m y^{n+1})dy=0$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=(n+1)x^m y^n$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2(m+1)x^m y^n+mx^{m-1}y^{n+1}$$
これらが等しくなるためには，
$$m=0,\ n+1=2m+2 \rightarrow m=0,\ n=1$$
したがって，$M(x,y)=y$ が積分因子

【例題5】
$(x+y^2+1)dx+2y\,dy=0$ について，積分因子を求めて微分方程式を解いてください．

（解答）
$P(x,y)=x+y^2+1$, $Q(x,y)=2y$ とおくと
$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=2y-0=2y$$
は0にならないから，元の微分方程式は完全微分形ではない．
x だけの関数になっている積分因子 $M(x)$ があるとすると
$$\frac{1}{Q}\int(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})dx=\frac{1}{2y}\int 2y\,dx=\int dx$$
$x=\log M(x)$ より
積分因子は $M(x)=e^x$

これを掛けると
$$e^x(x+y^2+1)dx+2ye^x dy=0$$
が完全微分形になるので，これを解く．
改めて，$P(x,y)=e^x(x+y^2+1)$, $Q(x,y)=2ye^x$ とおくと

【例題6】
$ydx+(2x+y)dy=0$ について，積分因子を求めて微分方程式を解いてください．

（解答）
$P(x,y)=y$, $Q(x,y)=2x+y$ とおくと
$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=1-2=-1$$
は0にならないから，元の微分方程式は完全微分形ではない．
そこで積分因子を求める．
$$\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})=\frac{-1}{2x+y}$$ は x だけの関数ではない．
$$\frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})=\frac{1}{y}$$ は y だけの関数になっている．
$$\int \frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dy=\int \frac{1}{y}dy=\log y$$
$\log y=\log M(y)$ より
$M(y)=y$ が積分因子

$I=\int Pdx=\int e^x(x+y^2+1)dx$ とおくと

部分積分により

$f=x+y^2+1$	$f'=1$
$g'=e^x$	$g=e^x$

$I=e^x(x+y^2+1)-\int e^x dx$

$=e^x(x+y^2+1)-e^x=e^x(x+y^2)$

$\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx=2ye^x$

$Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx=2ye^x-2ye^x=0$

$\int\left(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right)dy=\int(0)dy=0$

ゆえに

$e^x(x+y^2)=C$

これを掛けると

$y^2dx+(2xy+y^2)dy=0$

が完全微分形になるので，これを解く.

改めて，$P(x,y)=y^2$, $Q(x,y)=2xy+y^2$ とおくと

$\int Pdx=xy^2$

$Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx=2xy+y^2-2xy=y^2$

$\int\left(Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right)dy=\frac{y^3}{3}$

したがって

$xy^2+\frac{y^3}{3}=C_1$

$3xy^2+y^3=C$ …（答）

※それぞれ積分因子を求めて微分方程式を解いてください.

【問題7】

微分方程式 $(1+xy)dx+x^2dy=0$ の一般解を求めてください.

1 $e^x+xy=C$　　2 $e^x+\frac{y}{x}=C$

3 $\log x+xy=C$　　4 $\log x+\frac{y}{x}=C$

【問題8】

微分方程式 $ydx+(y-x)dy=0$ の一般解を求めてください.

1 $\frac{y}{x}+\log x=C$　　2 $\frac{x}{y}+\log y=C$

3 $xy+e^x=C$　　4 $xy+\log x=C$

【問題9】

微分方程式 $(x^2+2x-y^2)dx-2ydy=0$ の一般解を求めてください.

1 $e^{-x}(x^2+y^2)=C$　　2 $e^x(x^2+y^2)=C$

【問題10】

微分方程式 $(x^2y^2-y)dx-xdy=0$ の一般解を求めてください.

1 $xy+\frac{1}{x}=C$　　2 $xy+\frac{1}{y}=C$

3 $e^{-x}(x^2-y^2)=C$　　4 $e^{x}(x^2-y^2)=C$

3 $x+\frac{1}{xy}=C$　　4 $y+\frac{1}{xy}=C$

■[個別の頁からの質問に対する回答][全微分方程式について／17.2.26]

初めまして、ミスタイプがあると思われるのでご連絡申し上げます。ご確認をお願い致します。以下のところで、○　変数分離形の微分方程式としても解釈できる問題を，変数分離形として解く場合と，全微分方程式として解く場合とでは，別々に積分するかまとめて積分するかの違いがあります．○　変数分離形の微分方程式を変数分離形として解く場合には　dy/dx=f(x)g(x)
→dy/dx=f(x)g(y) と思われます。

＝＞[作者]：連絡ありがとう．訂正しました．