## ○ 逆行列の求め方

2）余因子行列を用いて筆算で求める方法

（各成分が数値として与えられた行列の行列式を求めるには1)のExcelによる方法で十分である．

線形代数の教科書では行列の「基本変形」を用いて逆行列を求めることが多いが，その説明はかなり長くなるので，ここでは次の定理によって説明する．）

【もとになる定理】

行列 $A$ の余因子行列を $\tilde{A}$ とおくと

$$A\,\tilde{A}=det(A)\ E$$

が成り立つ．
よって，

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\tilde{A}$$

【逆行列を求める手順】

(1) 元の行列の各成分 $a_{ij}$ に対して，その行と列を取り除いた行列の行列式を求め，これに符号を付ける．（符号までつけたものが余因子 $A_{ij}$ ）

(2) (1)で求めたもの $A_{ij}$ を成分とする行列を作る．

(3) (2)でできた行列の転置行列を作る．（これが余因子行列 $\tilde{A}$ ）

(4) 余因子行列 $\tilde{A}$（の各成分）を $det(A)$ で割ったものが元の行列の逆行列

（解説）

◇余因子とは◇

○ 各 $(i,j)$ 成分に対して，$i$ 行と $j$ 列を取り除いた残りの行列を考える．

---

(1) 例えば $a_{11}$ に対しては，次のように $a_{22}\sim a_{33}$ の2×2行列を考える．

| | | |
|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ |
| $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ |

次に，$det\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ に $(-1)^{1+1}$ の符号を付けたものを $(1,1)$ 余因子といい $A_{11}$ で表す．

$A_{11}=+det\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ を $(1,1)$ 余因子という．

符号は下の符号一覧表のようにチェック模様になり，$(1,1)$ 余因子の符号は＋である．

---

(2) 同様にして，$a_{21}$ に対しては，次のように $a_{12}\sim a_{33}$ の2×2行列を考える．

| | | |
|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ |
| $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ |

次に，$det\begin{pmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ に負の符号を付けたものが $(2,1)$ 余因子となる．

$A_{21}=-det\begin{pmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ を $(2,1)$ 余因子という．

---

(3) $a_{31}$ についても同様に $a_{12}\sim a_{23}$ の2×2行列を考える．

| | | |
|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ |
| $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ |

続き

○ 行列 $A$ の行列式 $det(A)$ は，これらの余因子を用いて表すことができる．（余因子展開）

$$det(A)=a_{11}\cdot det\begin{pmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}-a_{21}\cdot det\begin{pmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}+a_{31}\cdot det\begin{pmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$$

$$det(A)=a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}A_{31}$$

→ これは，行列式が2つのベクトルの内積で表されることを示している．

→ 行列 $A$ の行列式 $det(A)$ はベクトル $(a_{11}, a_{21}, a_{31})$ とベクトル $(A_{11}, A_{21}, A_{31})$ の内積に等しい．

→ これは，行ベクトルと列ベクトルの行列としての積が行列式 $det(A)$ に等しいことを表している．

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{31}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}\\ A_{21}\\ A_{31}\end{pmatrix}=det(A)\quad\cdots(1)$$

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{pmatrix}=det(A)\quad\cdots(2)$$

ここでは行列 $A$ の第1列について展開した余因子展開で示したが，余因子展開はいずれかの列または行について，「行列の成分とその余因子の積の和」を求めたものとなっている．

◇余因子行列とは◇

行列 $A$ の余因子をそのまま並べた行列と行列 $A$ との積では，上記のような余因子展開に対応するものができない．

列と列では掛けられない

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

行列 $A$ の余因子を並べた行列の転置行列を作ると行列 $A$ との積が，上記のような余因子展開に対応する．

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\quad\cdots(3)$$

転置行列にしておく

$$=\begin{pmatrix}det(A) & 0 & 0\\ 0 & det(A) & 0\\ 0 & 0 & det(A)\end{pmatrix}$$

行列 $A$ の余因子を並べた行列の転置行列 ${}^t[A_{ij}]$ を余因子行列といい $\tilde{A}$ で表す．

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

◇ $A\tilde{A}$ の対角成分，対角成分以外の成分◇

1) $A\tilde{A}$ の対角成分は，次のようになる．

$A\tilde{A}$ の $(1, 1)$ 成分は

$$a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}A_{31}=det(A)$$

⇔ 行列 $A$ の第1列について展開したものだから $det(A)$ に

次に，$det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ に正の符号を付けたものが $(3,1)$ 余因子となる．

$A_{31}=+det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ を $(3,1)$ 余因子という．

◇符号一覧表◇

次の表のように $(1,1)$ 成分からスタートして各 $(i,j)$ 成分に符号を付ける．･･･式では $(-1)^{i+j}$ と書かれるが，結果は「左上端が＋のチェック模様」になる．

水色で示したのは第1列に関して余因子展開するときに使う符号

| | | | |
|---|---|---|---|
| ＋ | － | ＋ | － |
| － | ＋ | － | ＋ |
| ＋ | － | ＋ | － |
| － | ＋ | － | ＋ |

続く⟶

等しい．

$det(A)$ を求めるときに,行列 $A$ のどの行，どの列について余因子展開してもよいから，第2列，第3列について展開したときを考えると次の等式が成り立つ．

$A\tilde{A}$ の $(2, 2)$ 成分は

$$a_{12}\cdot A_{12}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{32}A_{32}=det(A)$$

⇔ 行列 $A$ の第2列について展開したものだから $det(A)$ に等しい．

$A\tilde{A}$ の $(3, 3)$ 成分も同様

2) $A\tilde{A}$ の対角成分以外の成分は，次のようになる．

$A\tilde{A}$ の $(1, 2)$ 成分は

$$a_{12}\cdot A_{11}+a_{22}\cdot A_{21}+a_{32}A_{31}$$

となる．

ところで，　であるならば，

$$det(A)=a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}A_{31}$$

となるはずであるのに対して

$$a_{12}\cdot A_{11}+a_{22}\cdot A_{21}+a_{32}A_{31}$$

になっているのであるから，これは

$$A'=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

という行列を第１列について展開したものとなっている．

このような式は，行列 $A$ の2つの列が等しいときの展開に対応しており，2つの列が同じ場合の行列式は0になる．

同じ

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$a_{12}\cdot A_{11}+a_{22}\cdot A_{21}+a_{32}A_{31}=0$$

2つの列が等しいとき行列式は0になることは，次のことから分かる．

例えば，上記の $A'$ を第3列について展開すると

$$det(A)'=a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{22} \\ a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$+a_{33}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

となって，各々の2×2行列式は

$a_{22}a_{32}-a_{22}a_{32}=0$, $a_{12}a_{32}-a_{12}a_{32}=0$,

$a_{12}a_{22}-a_{12}a_{22}=0$ となるから，$det(A')=0$ になる．

線形代数の基本から順に習う場合は，行列式の基本性質○5 【行列式の性質 Ⅲ 】において，列の写像としての行列式の「交代性」（2つの列を入れ替えると行列式の符号が逆になる）により

$$det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}=-det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2つの列が等しいときに入れ替えると，

$$det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=-det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

だから

$$det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=0$$

が直ちに示される．

同様にして，一般に $i\neq j$ のとき，$A\tilde{A}$ の $(i, j)$ 成分は $0$ になることが示される．

以上の1)2)をまとめると上記の(3)のようになり

$A\widetilde{A}$ の

対角成分は $det(A)$ に等しい.

対角成分以外の成分は $0$ に等しい.

したがって,

$$A\widetilde{A}=det(A)\,E$$

$$A\,\frac{\widetilde{A}}{det(A)}=E$$

よって,

$$A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\widetilde{A}$$

**例1** 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

（解答）

各成分の余因子を求める.

$a_{11}=4$ の余因子は $A_{11}=2$

$a_{12}=-$ の余因子は $A_{12}=-5$

$a_{21}=-$ の余因子は $A_{21}=-(-1)=1$

$a_{22}=-$ の余因子は $A_{22}=4$

行列 $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の転置行列が余因子行列 $\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

これを $det(A)=4\cdot 2-5\cdot(-1)=13$ で割ると

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}$$ …（答）

**例2** 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 10 & -9 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

（解答）

各成分の余因子を求める.（個々の余因子は2×2行列の行列式 $det(A)=ad-bc$ に符号を付けたものになる）

$a_{11}=1$ の余因子は $10\cdot 2-(-2)\cdot(-9)=2$

$a_{12}=5$ の余因子は $-\{\,2\cdot 2-(-1)\cdot(-9)\,\}=5$

$a_{13}=-4$ の余因子は $2\cdot(-2)-(-1)\cdot 10=6$

$a_{21}=2$ の余因子は $-\{\,5\cdot 2-(-2)\cdot(-4)\,\}=-2$

$a_{22}=10$ の余因子は $1\cdot 2-(-1)\cdot(-4)=-2$

$a_{23}=-9$ の余因子は $-\{\,1\cdot(-2)-(-1)\cdot 5\,\}=-3$

$a_{31}=-1$ の余因子は $5\cdot(-9)-10\cdot(-4)=-5$

$a_{32}=-2$ の余因子は $-\{\,1\cdot(-9)-2\cdot(-4)\,\}=1$

$a_{33}=2$ の余因子は $1\cdot 10-2\cdot 5=0$

行列 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -2 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の転置行列が余因子行列

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

これを $det(A)=1(20-18)-2(10-8)+(-1)(-45+40)=2-4+5=3$ で割ると

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$ …（答）